itüdergisi/*c*
fen bilimleri
Cilt:8, Sayı:1, 67-80
Kasım 2010

Polinom olmayan skaler evrim denklemlerinin sınıflandırılması

Eti MİZRAHİ*, Ayşe Hümeyra BİLGE

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Literatürde, "integre edilebilen denklemler", lineer denklemlere dönüştürülebilen ya da ters spektral dönüşüm ile çözülebilen denklemler olarak tanımlanır (Calogero, 1991). Bilinen tüm integre edilebilen denklemlerin ortak bir özelliğini bulmaya dayalı yöntemlere "integrabilite testleri" adı verilir. Sonsuz sayıda korunan nicelikler, sonsuz sayıda simetriler, soliton çözümleri, yaygın kullanılan integrabilite testlerinden bazılarıdır. "Sınıflandırma problemi", integre edilebilir diferansiyel denklem ailelerinin sınıflandırılması olarak bilinir. Yakın geçmişte Sanders ve Wang sonsuz sayıda simetrilerin varlığını kullanarak, ölçek bağımsız skaler integre edilebilir, 7 inci mertebeden büyük, evrim denklemlerinin, 3 üncü ve 5 inci mertebeden denklemlerin simetrileri olduğunu göstererek sınıflandırma problemini, polinom ölçek bağımsız skaler denklemler için çözmüşlerdir (Sanders ve Wang, 1998). Keyfi m inci mertebeden evrim denklemlerinin sınıflandırılması hakkında, ilk sonuç Bilge (2005)'te elde edilmiştir. Bu sonuca göre, $n=m+1$ mertebeden trivial olmayan bir korunan yoğunluğu kabul eden, $m=2k+1$ ve $k\geq 3$ mertebeden evrim denklemleri kuazilineer olmalıdır. Bu çalışmada ise, $m=2k+1$'inci mertebeden integre edilebilir skaler evrim denklemlerinin, $m>7$ için, u_{m-i}, $i=0,1,2$ türevlerine göre polinom olduğu ispatlanmıştır. Burada integrabilite testi olarak Mikhailov ve diğerleri (1991) tarafından önerilen "formel simetri"lerin varlığı kullanılmıştır. Bu integrabilite testi, $\rho^{(i)}$ olarak adlandırılan bazı korunan yoğunlukların varlığını gerektirmektedir. Bu çalışmada kullanılan $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ ve $\rho^{(3)}$, genel ifadeleri Bilge (2005)'de verilmiş olan korunan yoğunluklardır. Hesaplamalarda kullanılan genel formüller $m\geq 19$ için geçerlidir. $m<19$, ($m=7, 9, 11, 13, 15, 17$) için hesaplar sembolik programlama dili REDUCE kullanılarak yapılmış ve aynı polinomluk özellikleri elde edilmiştir. Bu çalışmada sadece $m \geq 19$ için elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

***Anahtar Kelimeler:** İntegrabilite, simetri, korunan yoğunluklar.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Eti MİZRAHİ. mizrahi1@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 51.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Towards the classification of scalar integrable evolution equations in (1+1) dimensions" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 18.06.2008 tarihinde dergiye ulaşmış, 23.07.2008 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.04.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Towards the classification of scalar non-polynomial evolution equations

Extended abstract

In the literature, integrable equations are meant to be non-linear equations which are solvable by a transformation to a linear equation or by an inverse spectral transformation (Calogero, 1991). The difficulty in constructing an inverse spectral transformation had motivated the search for other methods which would identify the equations expected to be solvable by an inverse spectral transformation. These methods which consist of finding a property shared by all known integrable equations are called "integrability tests". The existence of infinite number of conserved quantities, infinite number of symmetries, soliton solutions are some of well known integrability tests.

In the classical theory, "symmetry of a differential equation" is defined in terms of the invariance groups of the differential equation. This definition is essentially equivalent to defining symmetries as solutions of the linearized equation. That is if $\boldsymbol{\sigma}$ *is a symmetry of the evolution equation* $u_t = F(x,t,u, u_x,...,u_{x...x})$ *then* $\sigma_t = F_*\sigma$ *where* F_* *is the Frechet derivative of* $\boldsymbol{F}$.

In this study we work towards the classification of scalar non-polynomial integrable evolution equations of order m*, using the "formal symmetry method". This integrability test is based on the existence of a truncated expansion of a formal pseudo-differential operator* $\boldsymbol{R}$ *satisfying the operator equation* $R_t + [R, F_*] = 0$.

The classification problem for scalar, polynomial, scale invariant integrable equations is solved in the work of (Sanders and Wang, 1998), where it is shown that integrable equations of order greater than or equal to seven are symmetries of third and fifth order equations. In subsequent papers these results are extended to the cases where negative powers are involved (Sanders and Wang, 2000), but more general non-polynomial equations are not studied by their method.

The "formal symmetry" method introduced by (Mikhailov etal., 1991) have been used to obtain a preliminary classification of essentially non-linear third order equations and quasi-linear fifth order equations. The classification of essentially non-linear third order equations is considered later in the work of (Heredero etal., 1995), where quasilinear integrable equations that are not linearizable are found to be related to the Korteweg-de-Vries and Krichever-Novikov equations through differential substitutions.

The first result towards a classification for non-polynomial m'th order evolution equations is obtained in (Bilge, 2005) where it is shown that scalar evolution equations $u_t = F[u]$*, of order* $m = 2k+1$ *with* $m \geq 7$*, admitting a conserved density* $\rho = Pu_n^2 + Qu_n + R$*, with P≠0, of order* $n = m+1$*, are quasi-linear. The method of (Bilge, 2005) is not applicable to third order equations, because for m=3, the canonical conserved density* $\rho^{(1)}$*, which the quasilinearity result is based on, is not of the generic form. For m=5, although the generic form of* $\rho^{(1)}$ *is valid, k=2 occurs as an exception and we cannot exclude the existence of fifth order non-quasilinear integrable equations, at least with the present method. For* $m \geq 7$ *the structure of integrable equations seems to be much simpler and one may hope to obtain a complete classification.*

In the present work we continue with the classification problem using formal symmetries and we prove that arbitrary (non-polynomial) scalar evolution equations of order $m \geq 7$*,* $u_t = F[u]$*, that are integrable in the sense of admitting the canonical conserved densities* $\rho^{(1)}$*,* $\rho^{(2)}$*, and* $\rho^{(3)}$ *introduced in (Mikhailov vd., 1991), are polynomial in the derivatives* u_{m-i} *for* $i = 0,1,2$*. These results have been obtained by the computation of* $\int D_t\rho^{(i)}$*, i=1,2,3, where we used only the coefficients of top two non-linear terms. First we proved that the top two non-linear terms come from top 4 derivatives in the expansion of* $D_t\rho$ *and we obtained the expressions of the coefficients of these top two nonlinear terms. Then we computed successively these coefficients for each case. These results are valid for* $m \geq 19$*, thus for the completeness of the proof we repeated the computations explicitly for the lower orders namely* $m = 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,$ *and obtained the same results which are omitted here.*

Keywords: *Integrability, symmetry, conserved density.*

Giriş

Skaler, ölçek bağımsızlık özelliğine sahip polinom formunda, integre edilebilir denklemlerin sınıflandırma problemi, Sanders ve Wang (1998) tarafından, 7 ve daha büyük mertebeden denk-lemlerin, 3 ve 5 inci mertebe denklemlerin simetrileri olduğu gösterilerek çözülmüştür.

Keyfi m'inci mertebe evrim denklemlerinin sınıflandırılması ile ilgili ilk sonuç (Bilge, 2005)'te elde edilmiştir. Bu sonuç, $n = m+1$ mertebeden $\rho = Pu_n^2 + Qu_n + R$ ve $P \neq 0$ formunda bir korunan yoğunluğu kabul eden, $m = 2k+1$, ($m \geq 7$) mertebeden $u_t = F[u]$ formunda, skaler evrim denklemlerinin kuazi-lineer olmasıdır. (Bilge, 2005)'te tartışıldığı gibi, önerilen yöntem, m=3 ve 5 için geçerli değildir.

Bu çalışmada sınıflandırma problemine, (Mikhailov vd., 1991) tarafından önerilen formel simetriler kullanılarak devam edilmiştir. Giriş bölümünden sonra, hesaplamalarda kullanılan notasyon ve terminoloji özetlenmiştir. Esas sonuçların verildiği, takip eden bölümlerde ise, Bilge (2005)'te genel ifadeleri verilmiş olan $\rho^{(i)}$, $i = 1,2,3$ kanonik yoğunlukları kullanılarak, sınıflandırma ile ilgili sonuçlar verilmiş, genel m değerleri için, $m = 2k+1$ mertebeden integre edilebilir denklemlerin u_m, u_{m-1} ve u_{m-2} türevlerine göre polinom olduğu gösterilmiştir.

Notasyon ve terminoloji

Çalışmamızda 1+1 boyutta, yani bir uzay ve bir zaman değişkenine bağlı fonksiyonlar için skaler evrim denklemleri incelenecektir. Bağımsız değişkenleri x, t, bağımlı değişkeni ise $u = u(x,t)$ olarak alınacaktır. Bağımsız değişken-lerin ve bağımlı değişkenin keyfi ama sonlu mertebeden türevlerinin, her mertebeden türevlenebilir fonksiyonları "diferansiyel fonksiyon" olarak adlandıracak ve $\varphi[u] = \varphi(x,t,u,u_1, ..., u_n)$ ile gösterilecektir (Olver, 1977).

Bu çalışmada kısmi türevleri alt indislerle belirtilecektir. Örneğin $u = u(x,t)$ ise,

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k},$$

$\varphi = \varphi(x,t,u,u_1,\cdots,u_n)$ ise,

$$\varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$$

notasyonu kullanılacaktır. Parantez içindeki $\alpha_{(i)}$ ve $\rho^{(i)}$ gibi alt ve üst indisleri ise, değişkenleri adlandırma amaçlı olarak kullanılacaktır. Yukarıda verilen notasyonla, φ fonksiyonu için x'e göre toplam türev, $D\varphi$,

$$D\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i u_{i+1} + \varphi_x \quad (1)$$

şeklinde, yüksek mertebeden türevler ise binom formülü uygulanarak

$$D^k\varphi = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (D^j \varphi_i) u_{i+k-j} \right] + D^{k-1}\varphi_x \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Hesaplamalarda gereken ve Bilge (2005)'te verilmiş olan, $D^k\varphi$'nin u_k'lara göre açık ifadeleri, $k \geq 7$ için geçerli olduğundan, Mizrahi (2007)'de ayrıntılı olarak tartışıldığı gibi, genel ifadelerimiz $m \geq 19$ için geçerlidir. D_t ile gösterilen zamana göre toplam türev;

$$D_t\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i D^i F + \varphi_t \quad (3)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Eğer ρ diferansiyel fonksiyonu korunan bir yoğunluk ise, herhangi bir σ diferansiyel fonksiyonunun

$$D_t\rho = D\sigma$$

eşitliğini sağlaması gerekir. Bu koşuldan ρ'nun belirlenmesi için, $D_t\rho$ ifadesinin integrali hesaplanır ve toplam türev olmayan terimlerin katsayıları sıfırlanır. Buradan elde edilecek koşullar adım adım ρ'nun ve F'nin belirlenmesini sağlar. Eğer φ ve ψ diferansiyel fonksiyonları, herhangi bir η diferansiyel fonksiyonu için $\varphi = \psi + \mathrm{D}\eta$ koşulunu sağlıyorsa, eşdeğer kabul edilecek ve $\varphi \cong \psi$ şeklinde gösterilecektir.

$\varphi[u]=\varphi(x,t,u,u_1,...,u_n)$ şeklinde, yani bağımlı değişkenin en fazla n'inci mertebeden türevine bağlı ise, φ'nin mertebesi n olarak tanımlanacak ve $|\varphi|=n$ olarak gösterilecektir. x'e göre toplam türev mertebeyi bir arttırdığından, $|\varphi|=n$ ise $|D^k\varphi|=n+k$ olur. Ayrıca, $u_t=F$ ve $|F|=m$ ise D_t türevi de mertebeyi m kadar arttıracaktır. Hesaplamalar, $n=m+l$ mertebesinden ρ'lar için $D_t\rho$ ifadesinde, en üst ilk iki lineer olmayan terimin katsayıları sıfırlanarak yapılmıştır. Bu terimler, Önerme 1'de ispatlandığı gibi, $D_t\rho$'nun açılımındaki en üst ilk 4 türevinden hesaplanmıştır. Kısmi integrasyon,

$p_1<p_2<\cdots<p_l<s-1$ ve $|\varphi|=k<p_1$ ise;

$$\varphi u_{p_1}^{a_1}\cdots u_{p_l}^{a_l}u_s \cong -D(\varphi u_{p_1}^{a_1}\cdots u_{p_l}^{a_l})u_{s-1}$$
$$\varphi u_{p_1}^{a_1}\cdots u_{p_l}^{a_l}u_{s-1}^{p}u_s \cong -\frac{1}{p+1}D(\varphi u_{p_1}^{a_1}\cdots u_{p_l}^{a_l})u_{s-1}^{p+1} \quad (4)$$

formülü ile uygulanmış ve yüksek mertebeden lineer olmayan bir terime rastlayana kadar tekrarlanmıştır.

Sınıflandırmadaki genel sonuçlar

Bu bölüme biçimsel simetri yönteminin tanımı ile başlayalım (Mikhailov vd., 1991). $u_t=F[u]$ bir evrim denklemi olsun. Rekürsiyon operatörü R, bu denklemin simetrilerini simetrilerine götüren lineer, genelde integro diferansiyel bir operatördür. Yani eğer σ, $u_t=F[u]$ denkleminin bir simetrisi ise, $R\sigma$ da aynı denklemin bir simetrisidir. Bu koşulda, F_*, $F_*=\sum_{i=0}^{m}F_iD^i$ eşitliği ile tanımlanan F'nin Frechet türevi olmak üzere, aşağıdaki operatör denklemi elde edilir:

$$R_t^k+\left[R^k,F_*\right]=0 \quad (5)$$

Eğer R, $u_t=F[u]$ evrim denkleminin bir rekürsyon operatörü ise, R'nin herhangi bir rasyonel kuvvetinin de aynı denklem için bir rekürsyon operatörü olduğu bilinmektedir. R'nin integralleri, psödo-diferansiyel operatör adı verilen, D^{-1}'in seri açılımı şeklinde yazılabilmekte ve $R^{k/n}$ hesaplanabilmektedir.

Mertebesi 1 olan bir rekürsyon operatöründen başlayarak, D operatörünün ters kuvvetlerinden oluşan bir formel seri açılımı ile k mertebesinde R^k, $k=2,3,\ldots$ operatörü, yani $R,R^2,...,R^k$ psödo-diferansiyel operatörleri hesaplanabilir. A ve B herhangi iki formel seri ise $[A,B]$ formel serisinde D^{-1}in katsayısının bir toplam türev olduğu bilinmektedir (Adler, 1979). R^k'da D^{-1}'in katsayısını $\rho^{(k)}$ olarak gösterilsin. (5) denkleminde $\left[R^k,F_*\right]$'da D^{-1}'in katsayısı ise, $\sigma^{(k)}$ herhangi bir diferansiyel fonksiyon olmak üzere $D\sigma^{(k)}$ şeklindedir ve $\rho_t^{(k)}+D\sigma^{(k)}=0$ denkleminin sağlanması gerekir. Bu da $\rho^{(k)}$'ların korunan yoğunluklar olduğu anlamına gelir. $\rho^{(k)}$'ların hesabı için mertebesi 1 olan bir formel seri açılımından başlayarak R^k, $k=m$'e kadar he-saplanır. R^m'nin, L birinci mertebeden bir psödo diferansiyel operatör olmak üzere F_*+L formunda olması gerektiği kullanılarak katsayılar belirlenir.

Uyarı 1. Mikhailov ve diğerleri (1991)'in metodunda $\rho^{(i)}$'lerin hesaplamalarında belli bir sayıdan büyük i değerleri için tam türev terimlerinin ihmal edilmemesi gerekir. Bu çalışmada kullanılan, $m\geq 5$ için $\rho^{(1)}$ ve $\rho^{(2)}$'nin, $m\geq 7$ için $\rho^{(3)}$'ün açık ifadeleri Bilge (2005)'de verilmiştir.

$D_t\rho$ ifadesini toplam türevlere göre hesaplamak için (3) denklemi kullanılarak, yüksek türevde lineer olmayan bir terimle karşılaşana kadar kısmi integrasyon uygulanmıştır. Aşağıda verilen Önerme 1'de, F denklemi $m=2k+1$ mertebesinde ve ρ korunan yoğunluğu $n=m+l$, mertebesinde ise, $m\geq 19$ için, lineer olmayan en yüksek iki terimin u_{3k+l+1}^2 ve u_{3k+l}^2 olduğu gösterilmiştir.

Önerme 1. $m=2k+1$, $n=m+l$ *olmak üzere* $u_t=F(x,t,u,\cdots u_m)$ *evrim denklemi ve* $\rho=\rho(x,t,u,\cdots u_n)$ *bir diferansiyel fonksiyon olsun,* $k+l-1\geq 0$ *için,*

$$
\begin{aligned}
(-1)^{k+1} D_t\rho \cong & \left[D^{k+1}\rho_n - D^k\rho_{n-1}\right]D^{k+l}F \\
& -\left[D^k\rho_{n-2} - D^{k-1}\rho_{n-3}\right]D^{k+l-1}F \\
& +O(u_{3k+l-1})
\end{aligned} \tag{6}
$$

olur.

İspat. $D_t\rho = \sum_{i=0}^{n}\rho_i D^i F + \rho_t$ ifadesinde en yüksek mertebeli türev, $\rho_n D^n F$ ifadesinden gelir. Burada, ρ_n ve $D^n F$ ifadelerinin mertebeleri sı-rası ile $2k+l+1$ ve $4k+l+2$ dir. $k+1$ kez kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\rho_n D^n F \cong (-1)^{k+1} D^{k+l}\rho_n D^{k+l}F$$

özdeşliğinde $D^{k+1}\rho$ ve $D^{k+1}F$ ifadelerinin mertebeleri sırası ile $3k+l+2$ ve $3k+l+1$ dir. Bir kez daha kısmi integrasyon uygulandığında u_{3k+l+1}'e göre lineer olmayan bir ifade elde edilir. Benzer şekilde $\rho_{n-1}D^{n-1}F$ ifadesinde, ρ_{n-1} ve $D^{n-1}F$ sırasıyla $2k+l+1$ ve $4k+l+1$ mertebesindedir. Bu kez, k kere kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\rho_{n-1}D^{n-1}F \cong (-1)^k D^k\rho_n D^{k+l}F$$

elde edilir. Burada mertebesi $3k+l+1$ olan $D^k\rho_{n-1}$ ve $D^{k+l}F$ ifadelerinin çarpımı sonucu, u_{3k+l+1}'e göre lineer olmayan bir ifade elde edilir. Buradan, u_{3k+l+1}'e göre lineer olmayan ifadenin, en büyük ilk iki türev olan $\rho_n D^n$ ve $\rho_{n-1}D^{n-1}F$ ifadelerinden geldiği, benzer bir argüman ile en yüksek iki lineer olmayan terimin, en yüksek 4 türevden elde edileceği ve kalan terimlerin $3k+l-1$ mertebesinden olacağı görülmektedir. $D_t\rho$ ifadesinde en yüksek lineer olmayan iki terimin katsayıları Önerme 2 ile verilmiştir. Bu makalede verilmiş olan sonuçların elde edilmesini sağlayan (7) ve (8) numaralı denklemler, bu çalışmanın belkemiğini oluşturmaktadır.

Önerme 2. *$u_t = F(x,t,u,\cdots u_m)$, $m=2k+1$ mertebeden bir evrim denklemi ve $\rho=\rho(x,t,u,\cdots u_n)$, $-2\le l\le 2$ olmak üzere $u_t = F$ denkleminin $n=m+l$ mertebeden bir korunan yoğunluğu olsun. $D_t\rho$ ifadesinde lineer olmayan en yüksek mertebeli iki terim, $m\ge 19$,* $k+l\ge 7$ için, *u_{3k+l+1}^2 ve u_{3k+l}^2 olup, katsayıları sırasıyla aşağıdaki gibidir:*

$$
\begin{aligned}
& (k+\frac{1}{2})F_m D\rho_{n,n} - (k+l+\frac{1}{2})DF_m\rho_{n,n} \\
& -F_{m-1}\rho_{n,n} = 0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
& \rho_{n,n}D^3F_m \\
& \left[\frac{1}{12}(2k^3+6k^2l+6kl^2+2l^3+3k^2+3l^2+6kl+k+l)\right] \\
& +\rho_{n,n}D^2F_{m-1}\left[\frac{1}{2}(k^2+l^2+2kl+2k+2l+1)\right] \\
& +\rho_{n,n}DF_{m-2}\left[\frac{1}{2}(2k+2l+3)\right] \\
& +\rho_{n,n}F_{m-3} \\
& +D\rho_{n,n}D^2F_m \\
& \left[\frac{1}{4}(-2k^3-4k^2l-2kl^2+k^2+l^2+2kl+k+l)\right] \\
& +D\rho_{n,n}DF_{m-1}\left[\frac{1}{2}(-2k^2-2kl+l+1)\right] \\
& +D\rho_{n,n}F_{m-2}\left[\frac{1}{2}(-2k+1)\right] \\
& +D^2\rho_{n,n}DF_m\left[\frac{1}{4}(2k^3+2k^2l-k^2-k)\right] \\
& +D^2\rho_{n,n}F_{m-1}\left[\frac{1}{2}k^2\right] \\
& +D^3\rho_{n,n}F_m\left[\frac{1}{12}(-2k^3-3k^2-k)\right] \\
& +D\rho_{n,n-1}DF_m\left[\frac{1}{2}(2k+2l-1)\right] \\
& +D\rho_{n,n-1}F_{m-1} \\
& +D^2\rho_{n,n-1}F_m\left[\frac{1}{2}(-2k-1)\right] \\
& +\rho_{n,n-2}DF_m\left[2k+2l-1\right] \\
& +\rho_{n,n-2}F_{m-1}\left[2\right]
\end{aligned}
$$

$$+D\rho_{n,n-2}F_m\left[-2k-1\right]$$
$$+\rho_{n-1,n-1}DF_m\left[\frac{1}{2}(-2k-2l+1)\right]$$
$$+\rho_{n-1,n-1}F_{m-1}\left[-1\right]$$
$$+D\rho_{n-1,n-1}F_m\left[\frac{1}{2}(1+2k)\right]=0 \qquad (8)$$

İspat. Önerme 1'de belirtilen integrasyonlar yapılır ve $D_t\rho$ ifadesindeki ilk dört terimden sadece u_{3k+l+1}^2 ve u_{3k+l}^2'yi içeren ifadelere katkısı olan terimler alınarak aşağıdaki özdeşlik elde edilir:

$$(-1)^{k+1}D_t\rho \cong \rho_{n,n}F_m u_{3k+l+1}u_{3k+l+2}$$
$$+\rho_{n,n}\left[F_{m-1}+(k+l)DF_m\right]u_{3k+l}u_{3k+l+2}$$
$$+\rho_{n,n}\left[F_{m-2}+(k+l)DF_m+\binom{k+l}{2}D^2F_m\right]$$
$$\times u_{3k+l-1}u_{3k+l+2}$$
$$+\rho_{n,n}\left[F_{m-3}+(k+l)DF_{m-2}+\binom{k+l}{2}D^2F_{m-1}\right.$$
$$\left.+\binom{k+l}{3}D^3F_m\right]u_{3k+l-2}u_{3k+l+2}$$
$$+(k+1)D\rho_{n,n}F_m u_{3k+l+1}u_{3k+l+1}$$
$$+(k+1)D\rho_{n,n}\left[F_{m-1}+(k+l)DF_m\right]u_{3k+l}u_{3k+l+1}$$
$$+(k+1)D\rho_{n,n}\left[F_{m-2}+(k+l)DF_{m-1}\right.$$
$$\left.+\binom{k+l}{2}D^2F_m\right]u_{3k+l-1}u_{3k+l+1}$$
$$+\left[\rho_{n,n-2}+D\rho_{n,n-1}+\binom{k+1}{2}D^2\rho_{n,n}-\rho_{n-1,n-1}\right]$$
$$\times F_m u_{3k+l+1}u_{3k+l}$$
$$+\left[\rho_{n,n-2}+D\rho_{n,n-1}+\binom{k+1}{2}D^2\rho_{n,n}-\rho_{n-1,n-1}\right]$$
$$\times\left[F_{m-1}+(k+l)DF_m\right]u_{3k+l}u_{3k+l}$$
$$+\left[\rho_{n,n-3}+(k+1)D\rho_{n,n-2}+kD^2\rho_{n,n-1}\right.$$
$$\left.+\binom{k+1}{3}D^3\rho_{n,n}-\rho_{n-1,n-2}-kD\rho_{n-1,n-1}\right]$$
$$\times F_m u_{3k+l+1}u_{3k+l-1}$$
$$+\rho_{n-2,n}F_m u_{3k+l}u_{3k+l+1}$$
$$+\rho_{n-2,n}\left[F_{m-1}+(k+l-1)DF_m\right]u_{3k+l-1}u_{3k+l+1}$$
$$+\left[\rho_{n-2,n-1}+kD\rho_{n-2,n}-\rho_{n-3,n}\right]F_m u_{3k+l}u_{3k+l} \qquad (9)$$

Bu ifadeye kısmi integrasyon uygulandıktan sonra u_{3k+l+1}^2'nin katsayısı olan (7) ile u_{3k+l}^2'nin kat-sayısı olan (8) elde edilir.

(7) denkleminden korunan yoğunluğun formu ve özellikleri hakkında bazı sonuçlar elde edilmiş olup yüksek mertebede korunan yoğunlukların, en yüksek türeve göre kuadratik olduğu ve her mertebedeki yüksek yoğunlukların ilk katsayılarının birbirlerine göre orantılı olduğu görülmüştür (Bilge, 2005).

Sonuç 1. $u_t=F(x,t,u,\cdots u_m)$, $m\geq 7$ *mertebeden evrim denklemi ve* $n>m$ *mertebeden* $\rho=\rho(x,t,u,\cdots u_n)$ *korunan yoğunluğu ise,*

$\rho_{n,n,n}=0$ 'dır. (10)

İspat. (7) denkleminin sadece ilk iki terimi içerdiği ve $l>0$, $k+1\geq 3$ için geçerli olduğu görülmektedir:

$$(k+\frac{1}{2})\frac{D\rho_{n,n}}{\rho_{n,n}}-(k+l+\frac{1}{2})\frac{DF_m}{F_m}=\frac{F_{m-1}}{F_m} \qquad (11)$$

(11)'da $n>m$ için en yüksek mertebede terimin $D\rho_{n,n}$ dolayısıyla $\rho_{n,n,n}=0$ olduğu görülmektedir.

Uyarı 2. (11)'den görüleceği gibi, ρ ve η, n inci mertebeden iki korunan yoğunluk, $\rho_{n,n}=P$ ve $\eta_{n,n}=Q$ ise, $DP/P=DQ/Q$ olur. Öteyandan ρ ve η, $|\rho|=n$ ve $|\eta|=n+1$ gibi ardışık mertebeli korunan yoğunluklar, $\rho_{n,n}=P$ ve $\eta_{n+1,n+1}=Q$, ise;

$$(k+\frac{1}{2})\left(\frac{DQ}{Q}-\frac{DP}{P}\right)=\frac{DF_{m-1}}{F_m}$$

olur ve dolayısıyla $Q=F_m^{2/m}P$ bulunur.

Uyarı 3. (7) ve (8) denklemlerinde, F ve ρ nun kısmi türevleri en fazla u_j ye bağımlı ise, bu denklemler u_{j+i}, $i>0$ ye göre polinomdur.

Not: Tez'de detaylı olarak anlatılan dereceli cebir yöntemi ile, hesaplamaların sadece en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları kullanılarak yapılabildiği ispatlanmıştır. Bu yöntem, hesaplamaların çok daha kısa ve net olmasını sağlamış ancak ayrıntılar burada verilmemiştir.

Genel durumlar için polinom sonuçlar

Bu bölümde, Önerme 2'deki denklemler, gerek (Bilge, 2005)'te hesaplanmış olan $\rho^{(i)}$, $i=1,2,3$ kanonik yoğunluklarına (Adım 3 ve 6), gerek ρ ve υ gibi jenerik korunan yoğunluklara uygulanarak, polinom sonuçlar elde edilmiştir. Bir, iki ve dördüncü adımlarda jenerik korunan yoğunluklar kullanılmıştır. Birinci adımda, homojen bir denklem sisteminin katsayılar mat-risinin $m>5$ için tekil olmamasından yola çıkılarak, $m>5$ için kuazilineerlik özelliği gösterilmiştir. İki ve dördüncü adımlarda, benzer bir yapı ile, bir homojen lineer denklem sisteminin tekil olmamasından, u_m in katsayısının sırasıyla u_{m-1}'den ve u_{m-2}'den bağımsız olduğu gösterilmiştir. Üçüncü ve altıncı adımlarda elde edilen sonuçlar, kanonik yoğunlukların açık ifadelerini gerektirmektedir. Üçüncü adımda u_{m-1}'e göre polinomluk, beşinci ve altıncı adımlarda ise u_{m-2}'e göre polinomluk ispatlanmıştır. Altıncı bölümde $\rho^{(1)}$ kanonik yoğunluğu kullanılmış, beşinci bölümde ise jenerik korunan yoğunluk ile başlayan ispat $\rho^{(3)}$ kanonik yoğunluğunun ifadesi kullanılarak tamamlanmıştır.

Adım 1. kuazilineerlik: $F_{m,m}=0$

Bu adımda, kuadratik korunan bir yoğunluğun varlığını kabul eden bir evrim denkleminin kuazilineer olduğu ispatlanmıştır. Bilge (2005)'te verilmiş olan bu ispatı tekrarlamamızın amacı, Önerme 3'teki denklemlerin kullanımı sayesinde yapılan ispatın daha kısa ve açık olmasıdır.

Önerme 3. $u_t=F(x,t,u,\cdots u_m)$, $m=2k+1\geq 13$ *mertebeli bir evrim denkleminin,*

$$\rho=Pu_{m+1}^2+Qu_{m+1}+R \tag{12}$$

$|P|=|Q|=|R|=m$ formunda bir korunan yoğunluğa sahip olduğunu varsayalım. Buradan $PF_{m,m}=0$ olur.

İspat. Korunan yoğunluk $m+1$ mertebeli olduğundan, $k+1\geq 7$ kısıtından dolayı, ispat $m\geq 13$ için geçerlidir. Bu koşullar altında elde edilen (7) denkleminde u_{m+1} in ve (8) denkleminde u_{m+3} ün katsayıları, sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$(2k+1)F_mP_m-(2k+3)PF_{m,m}=0 \tag{13}$$

$$(2k+1)(k^2+k+6)F_mP_m \\ -(2k+3)(k+1)(k+2)PF_{m,m}=0 \tag{14}$$

Bu iki denklem, aşağıdaki homojen lineer denklem sistemini vermektedir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ k^2+k+6 & -(k^2+3k+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_mP_m \\ PF_{m,m} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Bu lineer sistemde, katsayılar matrisi $k=2$ için tekildir. Homojen sistemin, $k\neq 2$ için sadece aşikar çözümü olduğundan, (15)'e göre

$$F_mP_m=PF_{m,m}=0 \tag{16}$$

Evrim denkleminin kuazilineer olma koşulu, (16) denkleminden, $P\neq 0$ için bulunur.

Sonuç 2. $\rho^{(1)}$ *kanonik yoğunluğu korunan yoğunluk ise* $F_{m,m}=0$ *bulunur.*

İspat. Bilge (2005)'te $\rho^{(1)}$ in ifadesi, $P=a^{-1}a_m^2$ ve $A=a^m$ olmak üzere, (12) denklemindeki ile aynı formdadır. Dolayısıyla, $PF_{m,m}=0$ eşitliği $F_{m,m}=0$ olmasını gerektirir.

Bilge (2005)'te, korunan yoğunluk koşulunun açık hesaplanması ile 7, 9 ve 11 mertebeli evrim denklemlerinin de kuazilineer olduğu gösterilmiştir. Kanonik yoğunlukların varlığı, integrabilite için gerekli koşul olmasından dolayı, $m=2k+1$ mertebeli ve $k\geq 3$ için integre edilebilir evrim denklemleri kuazilineerdir. Korunan yoğunluk koşulunun hesaplamalarında, genel formüller, $k+l\geq 7$ için uygulanabildiğinden, aşağıdaki sonuçlar $m\geq 19$ için geçerlidir. Düşük merte-belerde açık hesaplamalar ile sonuçlarımızın ge-çerliliği kanıtlanmış olup Mizrahi (2007)'de verilmiştir.

Adım 2: u_{m-1}'e göre polinomluk, ilk sonuç, $A_{m-1}=0$

İkinci ve üçüncü adımlarda, $u_t=Au_m+B$ evrim denkleminde A ve B katsayılarının, u_{m-1}'e göre bağımlılık koşulları belirlenmiştir. Bu amaç doğrultusunda, m mertebeli bir ρ jenerik korunan yoğunluğun varlığı kabul edilerek, $D_t\rho$' nun en üst mertebeli, lineer olmayan terimlerinin katsayıları olan ve (7), (8) denklemleri ile verilen ifadeler kullanılmıştır.

Önerme 4. *$u_t=Au_m+B$, $m\geq 19$ mertebeli ve $|A|=|B|=m-1$ formunda bir evrim denkleminin,*

$$\rho=Pu_m^2+Qu_m+R \tag{17}$$

ve $|P|=|Q|=|R|=m-1$ formunda bir korunan yoğunluğa sahip olduğunu varsayalım. Buradan;

$$PA_{m-1}=0\text{ 'dır.} \tag{18}$$

İspat. Bu ispatta, (7) ile (8) denklemleri, $l=0$, $F_m=A$ ve $\rho_{n,n}=2P$ için hesaplanmıştır. (7) denkleminde u_m'in katsayısı:

$$(2k+1)P_{m-1}A-(2k+3)A_{m-1}P=0 \tag{19}$$

(7) denkleminde ise u_{m+2}'in katsayısı:

$$\begin{aligned}&\left[2k^3+9k^2+13k+6\right]A_{m-1}P\\&\quad-\left[2k^3+3k^2+13k+6\right]P_{m-1}A=0\end{aligned} \tag{20}$$

olarak elde edilmiştir. (19) ile (20) denklemlerinden elde edilen lineer sistem aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix}2k+1 & -(2k+3)\\ 2k^3+3k^2+13k+6 & -(2k^3+9k^2+13k+6)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}AP_{m-1}\\ PA_{m-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{21}$$

Lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi $k=2$, dolayısıyla $m=5$ için tekil olup, $k\neq 2$ için aşikar çözümü vardır. Böylece $PA_{m-1}=AP_{m-1}=0$ bulunur. Öte yandan kanonik yoğunluk $\rho^{(1)}$ kullanıldığında A'nın u_{m-1}'den bağımsız olduğu görülmektedir.

Sonuç 3. *$\rho^{(1)}$ kanonik yoğunluğu, korunan bir yoğunluk ise, $A_{m-1}=0$ bulunur.*

İspat. $u_t=Au_m+B$ evrim denklemi için $\rho^{(1)}$ hesaplanıp, kısmi integrasyon uygulandığında, $\rho^{(1)}$'in, (17) denkleminin formunda ve

$$P=\frac{a_{m-1}^2}{a},\qquad A=a^m \tag{22}$$

olduğu görülür.

Buradan $PA_{m-1}=0$ eşitliği $A_{m-1}=0$ sonucunu gerektirir.

Adım 3: u_{m-1}'e göre polinomluk, ikinci sonuç, $B_{m-1,m-1,m-1}=0$

Burada, $\rho^{(1)}$ ile $\rho^{(3)}$ kanonik yoğunluklarının ko-runan yoğunluk olma koşulu, evrim denkleminde B katsayısının formunu belirleyecektir. $|A|=m-2$ ve $|B|=m-1$ olmak üzere $u_t=Au_m+B$ evrim denklemi, için $\rho^{(1)}$ ve $\rho^{(3)}$ hesaplandığında, $|Q^{(1)}|=|R^{(1)}|=m-2$ ve $|Q^{(3)}|=|R^{(3)}|=m-1$ olmak üzere;

$$\rho^{(1)} = P^{(1)}u_{m-1}^2 + Q^{(1)}u_{m-1} + R^{(1)}$$
$$\rho^{(3)} = P^{(3)}u_m^2 + Q^{(3)}u_m + R^{(3)}$$

formunda olup,

$$P^{(1)} = \frac{24}{m^2-1}a_{m-2,m-2} + a_{m-2}^2 a^{-1}(m^2-1) \qquad (23)$$

$$P^{(3)} = \frac{a}{m^3+3m^2-m-3}\Big[a_{m-2}^2(m^3+3m^2-121m+597) + 60a^{-m+1}a_{m-2}B_{m-1,m-1}\left(\frac{3}{m}-1\right) + 60a^{-2m+2}B_{m-1,m-1}^2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m^2}\right)\Big] \qquad (24)$$

olduğu görülmektedir.

Önerme 5. *$m \geq 19$ mertebeli ve $|A| = m-2$, $|B| = m-1$ olmak üzere, $u_t = Au_m + B$ evrim denklemi olsun. $\rho^{(1)}$ ve $\rho^{(3)}$ kanonik yoğunlukları korunan yoğunluk ise,*

$$B_{m-1,m-1,m-1} = 0 \text{ 'dır.} \qquad (25)$$

İspat. Bu sonucun ispatı için, sadece $\rho^{(3)}$'ün hesaplanması yeterli olduğu halde, öncelikle $\rho^{(1)}$'in hesaplanması ile sonuca ne kadar yaklaşıldığı görülecektir. İlk olarak (7) denklemi, $\rho = \rho^{(1)}$ için, yani $l = -1$, $F_m = A$ ve $\rho_{n,n} = \rho_{m-1,m-1} = 2P^{(1)}$ koşulları altında hesaplanarak

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)AP_{m-2}^{(1)}u_{m-1} - \left(k-\frac{1}{2}\right)P^{(1)}A_{m-2}u_{m-1} - P^{(1)}B_{m-1} = 0 \qquad (26)$$

elde edilmiştir. (26) ifadesi iki kez u_{m-1}'e göre türetilirse

$$2P^{(1)}B_{m-1,m-1,m-1} = 0 \qquad (27)$$

eşitliği elde edilir. Burada $P^{(1)}$ farklı sıfır ise, B katsayısı, u_{m-1}'e göre kuadratiktir, ancak $P^{(1)} = 0$ koşulu, a'ya göre bir diferansiyel denklem verdiğinden $B_{m-1,m-1,m-1} \neq 0$ koşulu gözardı edilemez. Bu diferansiyel denklemi çözmek yerine, ispat $\rho^{(3)}$ kullanılarak tekrarlanmıştır. (7) denklemi $\rho = \rho^{(3)}$ için, dolayısıyla $l = 0$, $F_m = A$ ve $\rho_{n,n} = \rho_{m,m} = 2P^{(3)}$ koşulları altında hesaplanmış olup

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)AP_{m-1}^{(3)}u_m - \left(k+\frac{1}{2}\right)P^{(3)}A_{m-2}u_{m-1} - P^{(3)}B_{m-1} = 0 \qquad (28)$$

denklemi elde edilmiştir. Bu denklem u_m'e göre lineer olduğundan, u_m'in katsayısı olan

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)AP_{m-1}^{(3)} = 0 \qquad (29)$$

ifadesinde A sıfırdan farklı olduğuna göre, $P^{(3)}$, u_{m-1}'den bağımsız olmalı. (24) denkleminde $P^{(3)}$ ifadesi, u_{m-1}'e göre türetildiğinde,

$$\left[a^{-m+1}a_{m-2}\left(\frac{3}{m}-1\right) + 2a^{-2m+2}B_{m-1,m-1}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m^2}\right)\right] B_{m-1,m-1,m-1} = 0 \qquad (30)$$

ifadesi elde edilir. Buradan;

$$B_{m-1,m-1,m-1} = 0 \qquad (31)$$

sonucu bulunur.

Önerme 5'e göre, $\rho^{(3)}$'ü korunan bir yoğunluk olarak kabul eden bir evrim denklemi, u_{m-1}'e göre polinom ve aşağıdaki formdadır.

$$u_t = Au_m + Cu_{m-1}^2 + Du_{m-1} + E \qquad (32)$$

Adım 4: u_{m-2}'e göre polinomluk, ilk sonuç, $A_{m-2} = C = 0$

Bu adımda iki jenerik korunan yoğunluk, $\rho = Pu_{m-1}^2 + Qu_{m-1} + R$, $\eta = Su_m^2 + Tu_m + U$'nün varlığı kabul edilerek, Uyarı 2'de verilmiş olan $S = F_m^{2/m}P$ bağıntısı kullanılmış ve $CP = AP_{m-2} = APa_{m-2}/a = 0$ eşitlikleri elde edilmiştir. Elde edilen sonucun $A_{m-2} = C = 0$ eşitliğini gerektirdiğini ispat etmek için $\rho^{(1)}$ ve $\rho^{(3)}$ kanonik yoğunlukları açık olarak hesaplanmıştır.

Önerme 6. *$u_t = Au_m + Cu_{m-1}^2 + Du_{m-1} + E$, $m \geq 19$, $m = 2k+1$ mertebeli ve $|A| = |C| = |D| = |E| = m-2$, olacak şekilde bir evrim denklemi olsun. Bu denklem,*

$$\rho = Pu_{m-1}^2 + Qu_{m-1} + R \tag{33}$$

$$\eta = Su_m^2 + Tu_m + U \tag{34}$$

$|P| = |Q| = |R| = m-2$, $|T| = |U| = m-1$ ve $S = F_m^{2/m}P$ olacak şekilde iki korunan yoğunluğa sahip ise,

$$CP = AP_{m-2} = APa_{m-2}/a = 0 \tag{35}$$

olur.

İspat. (7) ve (8) denklemlerini $l = -1$ $F_m = A = a^m, A_{m-2} = ma^{m-1}a_{m-2} = (2k+1)a^{m-1}a_{m-2}$ ve $\rho_{n,n} = \rho_{m-1,m-1} = 2P$ koşulları altında hesaplarsak, (7) denkleminde u_{m-1}'in katsayısı

$$4CP - (2k+1)AP_{m-2} + (2k-1)(2k+1)AP\frac{a_{m-2}}{a} = 0 \tag{36}$$

ile (8) denkleminde u_{m+1}'in katsayısı;

$$\begin{aligned}&12k^2CP - (2k^3 + 3k^2 + 13k + 6)AP_{m-2}\\&+ (2k^3 - 3k^2 + 13k + 6)(2k+1)AP\frac{a_{m-2}}{a} = 0\end{aligned} \tag{37}$$

olarak bulunur. Aynı işlemler, $l = 0, F_m = A = a^m$ ve $\rho_{n,n} = \rho_{m,m} = 2S = 2a^2P$ koşulları altında tekrarlanınca, (8) denkleminde u_{m+1}'in katsayısı;

$$\begin{aligned}&12(k^2 + 2k + 1)PC - (2k^3 + 3k^2 + 25k + 12)AP_{m-2}\\&+ (4k^4 4k^3 + 23k^2 - 19k - 6)AP\frac{a_{m-2}}{a} = 0\end{aligned} \tag{38}$$

olarak bulunur. (36), (37) ve (38) denklemlerinin oluşturduğu sistemde katsayılar matrisi $k = -1/2, -3/2, 2$ için tekil olup, $k \neq 2$ için sadece aşikar çözüm vardır ve (35) bulunur.

Özel olarak, $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$, ve $\rho^{(3)}$ kanonik yoğunluklarının, korunan yoğunluk olmaları koşulu altında hesaplanması ile de aynı sonuç elde edilir. $m \geq 19$, $m = 2k+1$ mertebeli $u_t = Au_m + Cu_{m-1}^2 + Du_{m-1} + E$ evrim denklemi $A = a^m$, $|A| = |C| = |D| = |E| = m-2$ ve $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$, $\rho^{(3)}$ için hesaplandığında, $|Q| = |R| = |T| = |V| = |U| = m-2, |Y| = |Z| = m-1$, için;

$$\begin{aligned}\rho^{(1)} &= Pu_{m-1}^2 + Qu_{m-1} + R,\\ \rho^{(2)} &= Su_{m-1}^3 + Tu_{m-1}^2 + Vu_{m-1} + U,\\ \rho^{(3)} &= Wu_m^2 + Yu_m + Z\end{aligned}$$

formunda olup, P, S, W katsayıları, $a' = \frac{\partial a}{\partial u_{m-2}}$ ve $C' = \frac{\partial C}{\partial u_{m-2}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}P = {}& a'' + \frac{m^2-1}{24}\frac{(a')^2}{a} + \frac{(1-m)}{m}\frac{C}{a^m}a'\\&- \frac{1}{m}\frac{C'}{a^m}a + \frac{2(m-1)}{m^2}\frac{C^2}{a^{2m}}a\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}S = {}& a''a' - \frac{1}{6}\frac{(5+m)}{m}\frac{C}{a^m}a''a\\&+ \frac{1}{6}\frac{(m-3)}{m}\frac{C'}{a^m}a'a + 2\frac{(m-1)}{m^2}\frac{C^2}{a^{2m}}a'a\\&+ \frac{1}{6}\frac{(6m - m^2 - 5)}{m}\frac{C}{a^m}(a')^2 + \frac{2}{m^2}\frac{C'C}{a^{2m}}a^2\\&+ \frac{8}{3}\frac{(1-m)}{m^3}\frac{C^3}{a^{3m}}a^2,\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}W = {}& a(a')^2 - \frac{120(m+3)}{m(m^3 + 3m^2 - 121m + 597)}\frac{C}{a^m}a'a^2\\&+ \frac{240(m-1)}{m^2(m^3 + 3m^2 - 121m + 597)}\frac{C^2}{a^{2m}}a^3\end{aligned} \tag{41}$$

şeklinde bulunur.

Korunan yoğunlukların üst mertebede kuadratik olması ve Uyarı 2'de, ardışık mertebeli korunan yoğunluklar için, verilen bağıntı sonucu:

$$S = 0 \quad \text{ve} \quad W = a^2 P \tag{42}$$

olması gerektiği bilinmektedir.

Aşağıda, Önerme 6 ile $\rho^{(i)}$'lerin korunan yoğun-luk olma koşullarının $A_{m-2} = C = 0$ eşitliğini gerektirdiği gösterilecektir.

Önerme 7. *$m \geq 19,\ m = 2k+1$ mertebeli ve $A = a^m, |A| = |C| = |D| = |E| = m-2$ için $u_t = Au_m + Cu_{m-1}^2 + Du_{m-1} + E$ evrim denklemi olsun. $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)}$ kanonik yoğunlukları birer korunan yoğunluk ise,*

$$A_{m-2} = C = 0 \tag{43}$$

bulunur.

İspat. Öncelikle $C = 0$ durumu ele alındığında ve $S = 0$ koşulu altında, $a''a' = 0$ bulunur. Burada $a' = 0$ ise ispat tamamlanmış olur. $a'' = 0$ durumunda ise P ifadesi, $P = (a')^2 / a$ şekline indirgenir. P ifadesi (35) denklemine yerleştirildiğinde, $A(a')^3 / a^2 = 0$ eşitliğinden $a' = 0$, buradan $A_{m-2} = 0$ bulunur.

$C \neq 0$ durumunda, (35) denkleminde $CP = 0$ ifadesi $P = 0$ eşitliğini gerektirir ve $W = a^2 P$ eşitliğinden $W = 0$ bulunur. Bu durumda, (39, 40, 41) denklemleri, a ve C'ye bağlı üç lineer olmayan denklemden meydana gelen bir sistem oluşturur. Sembolik hesaplamalardan $C = 0$ olduğu görülmektedir. Aşağıda ise analitik bir ispat verilmektedir. $\tilde{a} = a' / a$ ve $\tilde{C} = C / a^m + m\tilde{a}\tilde{C}$ ifadeleri tanımlanmıştır.

Buradan $C' / a^m = \tilde{C}'$, $a'' / a = \tilde{a}' + \tilde{a}^2$ ve

$$\frac{P}{a} = \frac{m^2 + 23}{24}\tilde{a}^2 + \frac{1-2m}{m}\tilde{a}\tilde{C} + \tilde{a}' + \frac{2(m-1)}{m^2}\tilde{C}^2 - \frac{1}{m}\tilde{C}' \tag{44}$$

$$\frac{S}{a^2} = \tilde{a}^3 + \frac{1}{6}\frac{(5m - m^2 - 10)}{m}\tilde{a}^2\tilde{C} + \frac{4m-2}{m^2}\tilde{a}\tilde{C}^2 + \frac{1}{6}\frac{(m-13)}{m}\tilde{a}\tilde{C} - \frac{1}{6}\frac{(5+m)}{m}\tilde{a}'\tilde{C} + \tilde{a}\tilde{a}' + \frac{2}{m^2}\tilde{C}\tilde{C}' + \frac{8}{3}\frac{(1-m)}{m^3}\tilde{C}^3 \tag{45}$$

$$\frac{W}{a^3} = \tilde{a}^2 - \frac{120(m+3)}{m(m^3 + 3m^2 - 121m + 597)}\tilde{a}\tilde{C} + \frac{240(m-1)}{m^2(m^3 + 3m^2 - 121m + 597)}\tilde{C}^2 \tag{46}$$

ifadeleri elde edilir.

W / a^3 ifadesi, κ_1 ve κ_2, (46) denkleminden tanımlanabilen sabitler olmak üzere, aşağıdaki formdadır:

$$\frac{W}{a^3} = \tilde{a}^2 - 2\kappa_1\tilde{C}\tilde{a} + \kappa_2\tilde{C}^2 \tag{47}$$

$W = 0$ olduğundan,

$$\tilde{a}_{1,2} = \tilde{C}(-\kappa_1 \pm \sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2}) \tag{48}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede $\tilde{C}$'nin katsayısı olarak γ tanımlanırsa, $\tilde{a} = \gamma\tilde{C}$ ve $\tilde{a}' = \gamma\tilde{C}'$ elde edilir.

$$\frac{P}{a} = \left(\frac{m^2 - 23}{24}\gamma^2 + \frac{1-2m}{m}\gamma + 2\frac{m-1}{m^2}\right)\tilde{C}^2 + \left(\gamma - \frac{1}{m}\right)\tilde{C}' = 0 \tag{49}$$

$$\tilde{C}^{-1}\frac{S}{a^2} = \left(\gamma^2 - \frac{3}{m}\gamma + \frac{2}{m^2}\right)\tilde{C}' + \left(\gamma^3 - \frac{\gamma^2}{3}\frac{4m+5}{m} + \gamma\frac{4m-2}{m^2} + \frac{8}{3}\frac{1-m}{m^3}\right)\tilde{C}^2 = 0 \tag{50}$$

(49) ile (50) denklemleri, $\tilde{C}'$ ve $\tilde{C}^2$ için bir lineer homojen denklem sistemi meydana getirmektedir. Sistemin katsayılar matrisi tekil olmadığından $\tilde{C}=0$ bulunur. Dolayısıyla (48) denklemi, $\tilde{a}=a'=0$ eşitliğini verir ve ispat tamamlanır.

Adım 5. u_{m-2}'e göre polinomluk, ikinci sonuç: $D_{m-2,m-2}=0$

Burada D katsayısının u_{m-2}'e göre lineer olduğunu göstereceğiz.

Önerme 8. *$m\ge 19$ mertebeli ve $|A|=m-3$, $|D|=|E|=m-2$ olacak şekilde,*

$$u_t = Au_m + Du_{m-1} + E \tag{51}$$

evrim denklemi, $|P|=m-3$, $|Q|=|R|=m-2$ olacak şekilde

$$\rho = Pu_{m-1}^2 + Qu_{m-1} + R \tag{52}$$

formunda bir korunan yoğunluğa sahip olduğunu varsayalım. Buradan

$$D_{m-2,m-2}=0\text{ 'dır.} \tag{53}$$

İspat. (7) denklemi, (51) evrim denklemi ve (52) korunan yoğunluk denklemi için hesaplanmıştır. Burada, $l=-1$, $F_m=A$, $\rho_{n,n}=2P$ olduğundan:

$$\left[k+\frac{1}{2}\right]2P_{m-3}Au_{m-2} - \left[k-\frac{1}{2}\right]2PA_{m-3}u_{m-2} = 2PD \tag{54}$$

eşitliği elde edilir. (54) ifadesi u_{m-2}'e göre iki kez türetildiğinde,

$$PD_{m-2,m-2}=0 \tag{55}$$

bulunur.

Bilge (2005)'te hesap edilen $\rho^{(3)}$ ifadesinin de aynı koşullar altında, (52) denklemi ile aynı formda olduğu ve en üst mertebe kuadratik türevi olan u_{m-1}^2'nin katsayısı olan P'nin aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\begin{aligned} P = {}& \frac{m^4-10m^2+720m-2151}{m^4-10m^2+9}aa_{m-3}^2 \\ &+ \frac{60(-3m^3+8m+3)}{m(m^4-10m^2+9)a^{2m}}a^2a_{m-2}D_{m-2} \\ &+ \frac{60}{m^2(m^2+4m+3)a^{2m}}a^3D_{m-2}^2 \end{aligned} \tag{56}$$

Buradan

$$P = P^{(0)} + P^{(1)}D' + P^{(2)}D'^2 \tag{57}$$

formunda yazılabilir ve $PD''=0$ ifadesinden

$$D''(P^{(0)} + P^{(1)}D' + P^{(2)}D'^2)=0 \tag{58}$$

ifadesi ve dolayısıyla

$$D'' = D_{m-2,m-2}=0 \tag{59}$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 4. $\rho^{(3)}$ kanonik yoğunluğu korunan bir yoğunluk ise D katsayısı u_{m-2}'e göre lineerdir.

Bu sonuçtan yola çıkarak, $|A|=|G|=|H|=m-3$ ve $|E|=m-2$ olacak şekilde, integre edilebilir bir evrim denklemi aşağıdaki formdadır.

$$u_t = Au_m + Gu_{m-1}u_{m-2} + Hu_{m-1} + E \tag{60}$$

Adım 6. u_{m-2}'e göre polinomluk, üçüncü sonuç: $E_{m-2,m-2,m-2,m-2}=0$.

Son adımda, $\rho^{(1)}$ kanonik yoğunluğun açık ifadesi kullanılarak, E katsayısının u_{m-2}'e göre bağımlılığı irdelenmektedir. $|A|=|G|=|H|=m-3$ ve $|E|=m-2$ olacak şekilde,

$$u_t = Au_m + Gu_{m-1}u_{m-2} + Hu_{m-1} + E\,,\; m\ge 19 \tag{61}$$

evrim denklemi için kanonik yoğunluk, $\rho^{(1)}$ $a^m = A$ olacak şekilde aşağıdaki formdadır:

$$\rho^{(1)} = \frac{u_{m-2}^2}{m^2-1}\left[\frac{a_{m-3}^2}{a}(m^2-1)+36\frac{a_{m-3}G}{a^m}(\frac{1}{m}-1)\right.$$
$$\left.+24\frac{aG_{m-3}}{ma^m}+12\frac{aG^2}{ma^{2m}}(1-\frac{1}{m})\right]$$
$$+\frac{2u_{m-2}u_{m-3}}{m^2-1}\left[\frac{a_{m-3}a_{m-4}}{a}(m^2-1)\right.$$
$$\left.+18\frac{a_{m-4}G}{a^m}(\frac{1}{m}-1)+12\frac{aG_{m-4}}{ma^m}\right]$$
$$+12u_{m-2}\frac{H}{a^{2m}m^2(m+1)}\left[2aG-ma^m a_{m-3}\right]$$
$$+u_{m-3}^2\frac{a_{m-4}^2}{a}-12u_{m-3}\frac{a_{m-4}H}{m(m+1)a^m}$$
$$+12\frac{a}{a^{2m}m^2(m^2-1)}\left[-2ma^m E_{m-2}+H^2(m-1)\right] \quad (62)$$

Önerme 9. $|A|=|G|=|H|=m-3$, $|E|=m-2$ *olacak şekilde,*

$$u_t = Au_m + Gu_{m-1}u_{m-2} + Hu_{m-1} + E\,,\ m \geq 19 \quad (63)$$

evrim denklemi ve $\rho^{(1)}$ *kanonik yoğunluğu bir korunan yoğunluğu ise*

$$E_{m-2,m-2,m-2,m-2} = 0\text{'dır.} \quad (64)$$

İspat. (62) ifadesinden de görüleceği gibi, $\rho^{(1)}$, $m-2$ mertebesindedir ancak, E'nin formunu bilmediğimizden, u_{m-2}'e göre polinom olup olmadığı hakkında bir bilgimiz yoktur. (7) denklemi, $l=-2$, $F_m = A$ ve $F_{m-1} = Gu_{m-2}+H$ ifadeleri ve (63) denklemi için hesaplanmış ve

$$(k+\frac{1}{2})AD\rho^{(1)}_{m-2,m-2} - (k-\frac{3}{2})DA\rho^{(1)}_{m-2,m-2}$$
$$= (Gu_{m-2}+H)\rho^{(1)}_{m-2,m-2} \quad (65)$$

eşitliği elde edilmiştir. (65) ifadesinde u_{m-1}'in katsayısı:

$$\rho^{(1)}_{m-2,m-2,m-2} = 0 \quad (66)$$

olarak bulunur. Böylece, $a \neq 0$ olduğundan,

$$\frac{\partial^3\rho^{(1)}}{\partial u_{m-2}^3} = -\frac{24a^{-m+1}}{m(m^2-1)}E_{m-2,m-2,m-2,m-2} = 0 \quad (67)$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç olarak, m mertebeli integre edilebilen evrim denklemi, $|A|=|G|=|H|=|J|=|L|=|N|=|S|=m-3$ olacak şekilde,

$$F = Au_m + Gu_{m-1}u_{m-2} + Hu_{m-1} + Ju_{m-2}^3 + Lu_{m-2}^2$$
$$+Nu_{m-2} + S \quad (68)$$

formundadır.

Uyarı 4. $\rho^{(i)}$, $i=1,2,3$ ifadelerini kullana-rak, birkaç adım daha ilerlenmiş ve (68) ifadesinde, A'nın u_{m-3}'den bağımsız ve $G=0$ olduğu gösterilmiştir. Ancak, u_{m-3}'e göre polinomluğun elde edilmesi, daha fazla kanonik yoğunluğun açık ifadelerinin belirlenmesini gerektirmektedir.

Sonuçlar

Bu çalışmada, $\rho^{(1)},\rho^{(2)},\rho^{(3)}$ kanonik yoğunluk ifadeleri kullanılarak, integre edilebilir, m'inci mertebeden evrim denklemlerinin, ilk üç büyük türev olan u_m, u_{m-1}, u_{m-2}'ye göre polinom olduğu ispatlanmıştır. Hesaplamalara devam edildiği halde, polinomluk anlamında genel bir formül elde edebilmek için başka kanonik yoğunlukların hesaplanması gerektiği görülmüştür. Genel hesaplamalarımızda 3 kanonik yoğunluk ifadesi kullanılmış olup, bilinen $\rho^{(-1)}$ ve $\rho^{(0)}$ kanonik yoğunluk ifadelerinin kullanılmasının sonuçlar hakkında daha fazla bilgi verebileceği düşünülmüş ve $m=7$ için yapılan açık hesaplamalarda sözü edilen 5 kanonik yoğunluk ifadesi kullanılmıştır. Ancak $m=7$ için elde edilen sonuçlar genel m için elde edilenlerden farklı olmamıştır. İleriki çalışmalarda birkaç kanonik yoğunluğun hesaplanmasının ve tezde anlatılan dereceli cebir yapısının uygulanmasının, genel m için düşük mer-tebelerde sınıflandırma probleminin çözümüne yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Kaynaklar

Adler, M., (1979). On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations, *Inventiones mathematicae*, **50,** 219-248.

Bilge, A.H., (2005). Towards the classification of scalar non-polinomial evolution equations: quasilinearity, *Computers and Mathematics with Applications*, **49**, 1837-1848.

Calogero, F., (1991). Why are certain nonlinear pdes both widely applicable and integrable? *What Is Integrability?,* Zakharov, V.E., *eds*, Springer-Verlag, Berlin.

Heredero, R.H., Sokolov, V.V. ve Svinolupov, S.I., (1995). Classification of 3rd order integrable evolution equations, *Physica D*, **87**, 32-36.

Mikhailov, A.V., Shabat, A.B. ve Sokolov, V.V., (1991). The symmetry approach to the classification of integrable equations in *What is Integrability?,* Zakharov, V.E., *eds*, Springer-Verlag, Berlin.

Mizrahi, E., (2007). Towards the classification of scalar non-polynomial evolution equations: polynomiality in top three derivatives, submitted to *Studies in Applied Mathematics.*

Olver, P.J., (1977). Evolution equations possessing infinitely many symmetries, *Journal of Mathematical Physics*, **18**, 1212-1215.

Sanders, J.A. ve Wang, J.P., (1998). On the integrability of homogeneous scalar evolution equations, *Journal of Differential Equations,* **147,** 410-434.

Sanders, J.A. ve Wang, J.P., (2000). On the integrability of non-polynomial scalar evolution equations, *Journal of Differential Equations,* **166,** 132-150.