itüdergisi/***c***
fen bilimleri
Cilt:8, Sayı:1, 89-96
Kasım 2010

Kuple lineer dalga sisteminin çözümünün integral gösterimi

İrma HACINLIYAN*, **Saadet ERBAY**

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, homojen olmayan kuple lineer iki dalga denklem sisteminin çözümlerinin integral gösterimi elde edilmiştir. Bu denklemler; sonsuz, homojen, zayıf nonlineer ve zayıf dispersif elastik bir ortamda (2+1) (iki uzay ve bir zaman) boyutlu uzun ve kısa dalga etkileşimi probleminden türetilen eliptik-hiperbolik-hiperbolik (EHH) halindeki genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sisteminin bir parçasını oluşturmaktadır. GDS sisteminin EHH ve diğer durumları, sistemin katsayılarının işaretine göre sınıflandırılmasıyla belirlenmiştir. EHH durumdaki GDS sistemi, bir nonlineer Schrödinger (NLS) tipi denklem ve simetrik olmayan kuple lineer dalga sisteminden oluşmuştur. İkinci mertebe iki bilinmeyen içeren simetrik olmayan kuple lineer dalga sistemi, dört karakteristik değişken yardımıyla birinci mertebe dört bilinmeyen içeren bir lineer sisteme indirgenmiştir. Sistem karakteristik değişkenlere göre integre edilmiş ve sisteminin hiperbolik-hiperbolik (HH) olmasından dolayı karakteristik değişkenler üzerinde tanımlanan sınır koşulları kullanılarak çözüm elde edilmiştir. Böylece kuple lineer dalga sisteminin çözümlerinin integral gösterimi bulunmuştur. Bu gösterim tek dalga denkleminin çözümlerinin integral gösterimi ile karşılaştırılarak, dalga sisteminin dört karakteristik değişkene bağlı olmasının çözümlerde neden olduğu karmaşık yapı tartışılmıştır. Ayrıca çözümlerinin integral gösteriminin en basit uygulaması olarak, karakteristik değişkenlerden yararlanılarak, üç bileşenli GDS sistemi yerel olmayan terimleri içeren tek NLS denklemine indirgenmiştir. Bu integral gösteriminin GDS sisteminin başlangıç değer probleminin incelenmesinde ve bazı lokalize çözümlerinin elde edilmesinde nasıl kullanılabileceği kısaca tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin integral gösterimi, kuple dalga sistemi, genelleştirilmiş Davey-Stewartson sistemi.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: İrma HACINLIYAN. hacinliy@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 51.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Genelleştirilmiş Davey-Stewarson sistemi için başlangıç değer problemi " adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 06.06.2008 tarihinde dergiye ulaşmış, 04.07.2008 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.04.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Integral representation of solutions to a coupled linear wave system

Extended abstract

In the present study, we consider a system of two asymmetrically coupled linear wave equations with nonhomogeneous terms. This is a part of a generalized Davey-Stewartson (GDS) system which can be reduced to the Davey-Stewartson (DS) equation through a nonlinear variable transformation for some special parameters values. The GDS system has been derived to model (2+1) dimensional wave propagation in a bulk medium composed of an elastic material with coupled stresses. This system consists of one nonlinear Schrödinger (NLS) type equation for the complex amplitude of a short wave coupled with two linear wave equations for long waves propagating in the medium.

The GDS system can be classified with respect to the parameter values. This classification is based on the eigenvalues of the coefficient matrix of a first order linear system with four equations equivalent to the second order linear system. The GDS system in the elliptic-hyperbolic-hyperbolic (EHH) case can be written in a dimensionless form as

$$iu_t + \gamma u_{xx} + u_{yy} = \chi\, |u|^2\, u + b(\alpha\phi_{1,x} + \phi_{2,y})u\,,$$
$$\phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} - \beta\,\phi_{2,xy} = \alpha(|u|^2)_x\,,$$
$$\phi_{2,xx} - \lambda\phi_{2,yy} - \beta\,\phi_{1,xy} = (|u|^2)_y$$

where x and y are spatial coordinates and t is time; u is the complex amplitude of the short transverse wave mode, and ϕ_1 and ϕ_2 are the long longitudinal and long transverse wave modes, respectively. $\gamma, \chi, b, \beta, \alpha$ and λ also are constants.

The purpose of the present study is to obtain integral representations of solutions to the coupled linear nonhomogeneous wave equations. Our argument is a modification of the method which is used to find an integral representation of a solution for a single wave equation. This method is that the wave equation is written in characteristic coordinates and integrations are performed along them.

In order to obtain the integral representation of the solution ϕ_1 and ϕ_2, the coupled wave system is transformed to a system of first order equations and can be solved directly. The coefficient matrix of the new system has four real distinct eigenvalues, which enables us to define the following four characteristic coordinates $\xi_1 = -r_1 x + y$, $\xi_2 = r_1 x + y$, $\eta_1 = -r_2 x + y$ and $\eta_2 = r_2 x + y$. Since the system does not decouple in characteristic coordinates, there is no natural pair of characteristics. On the other hand, we can either choose the characteristic pair (ξ_1, ξ_2) or (η_1, η_2) to define a coordinate transformation from the $xy-$plane to a plane formed by a set of the characteristic variables. In this study, we will choose the pair (ξ_1, ξ_2) and express (η_1, η_2) in terms of (ξ_1, ξ_2). Because of the hyperbolic nature of the system, the radiation type homogeneous boundary conditions on ϕ_1 and ϕ_2 will also be assumed $\lim_{\xi_1\to\infty}\phi_1(x,y) = \lim_{\xi_2\to\infty}\phi_1(x,y) = 0$ and $\lim_{\xi_1\to\infty}\phi_2(x,y) = \lim_{\xi_2\to\infty}\phi_2(x,y) = 0.$ Than we perform integrations along characteristics and make use of the radiation boundary values along the characteristics to determine the unknown functions ϕ_1 and ϕ_2. After long calculations, we obtain the representation of the solutions ϕ_1 and ϕ_2 for $r_1 \neq r_2$. We are able to see the complex interactions among the four characteristics in the limits of the integrals appearing in the representation of solutions. As a special case, when $r_1 = r_2$, the system reduced to the decoupled system because of $\beta = 0$. Thus, solutions ϕ_1 and ϕ_2 are the same as the solution for the single wave equation.

In conclusion, the GDS system can be reduced to a non-local NLS equation by using the representation of solution to the coupled wave equations. This equation allows us to present some localized solutions to the GDS system for some special choices of the parameters and find some estimates of the solutions to the system. Moreover; it also helps us to investigate the global existence of the solution to the GDS system for small initial data, blow up of the solutions, asymptotic behavior of the solutions and the local existence in time of solutions without smallness condition on the data.

Keywords: *Integral representations of partial differential equations, coupled wave system, generalized Davey-Stewartson system.*

Giriş

Zayıf nonlineer ve zayıf dispersif sürekli ortamlardaki iki boyutlu dalga yayılımı problemlerinde, kısa ve uzun dalgaların etkileşiminin mümkün olduğu durumlarda dalga hareketi

$$i\,u_t + p u_{xx} + u_{yy} = |u|^2 u + u\phi_x,$$

$$\phi_{xx} + m\phi_{yy} = (|u|^2)_x \qquad (1)$$

şeklindeki kuple iki denklem ile tanımlanır. Burada t zaman, x ve y uzay değişkenleri olmak üzere u dalganın karmaşık genliğini, ϕ ise reel dalga genliğini gösterir. (1) denklemleri ilk olarak Davey ve Stewartson (1974) tarafından su yüzeyindeki dalga hareketini tanımlayan denklemler olarak elde edilmiştir ve literatürde Davey-Stewartson (DS) denklemi olarak bilinir. Daha sonra yüzey geriliminin hesaba katıldığı durumda, yüzey dalga hareketinin de aynı formda bir sistem ile gösterilebildiği Djordjevic ve Redekopp (1977) tarafından bulunmuştur. Ayrıca (1) sisteminin (p,m) işaretinin $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,+)$ veya $(-,-)$ olmasına göre, sırası ile eliptik-eliptik (EE), eliptik-hiperbolik (EH), hiperbolik-eliptik (HE) veya hiperbolik-hiperbolik (HH) olarak sınıflandırılmıştır.

DS sisteminin EH hali, bir nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ve bir lineer dalga denkleminden oluşur. Bu sistemin lokalize çözümleri, dalga denkleminin integral formdaki çözümlerinin $(1)_1$ denkleminde yazılmasıyla elde edilen yerel olmayan NLS denklemi kullanılarak bulunur (Fokas ve Santini, 1990; Radha ve Lakshmanan, 1997). NLS denkleminin yerel olmayan bu formu, DS sisteminin başlangıç değer probleminin incelemesinde de kullanılır (Ghidaglia ve Saut, 1990). O zaman, bazı özel parametre değerleri için DS sistemine indirgenebilen genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sisteminin içindeki dalga denklemlerinin çözümlerinin integral gösteriminin bulunması ilginç bir çalışma konusu olacaktır. Kuple dalga sisteminin çözümlerinin elde edilmesinde, tek dalga denkleminin çözümünde izlenen yolun bir genişlemesi kullanılacaktır.

Tek dalga denkleminin çözümlerinin integral gösterimini bulmak için önce $(1)_2$ dalga denklemi, $f = (|u|^2)_x$ olmak üzere,

$$\phi_{xx} - c^2\phi_{yy} = f(x,y) \qquad (2)$$

şeklinde yazılır. (2) denklemi hiperbolik olduğundan Fourier dönüşüm tekniğini kullanarak denklemi çözmek mümkün değildir. Bu nedenle, (2) dalga denklemi karakteristik koordinatlarda ifade edilir ve uygun sınır koşulları altında çözülür. ϕ fonksiyonunun, $\xi = -cx + y$ ve $\eta = cx + y$ karakteristik değişkenleri boyunca $\lim_{\xi\to\infty}\phi(x,y) = \lim_{\eta\to\infty}\phi(x,y) = 0$ ile verilen radyasyon koşullarını sağladığı varsayılmıştır. Ayrıca $\xi \to -\infty$ ve $\eta \to -\infty$ için herhangi bir sınır koşulu tanımlanmamıştır (Ablowitz ve Segur, 1979).

(2) dalga denklemi ξ ve η karakteristik değişkenler cinsinden ifade edilir ve integre edilirse çözümün integral gösterimi; (ξ,η) koordinatlarında $\phi(\xi,\eta) = \int_\xi^\infty \int_\eta^\infty f(\xi',\eta')\,d\eta'\,d\xi'$ ve (x,y) koordinatlarında ise

$$\phi(x,y) = \int_{R^2} K(x,y,x'y')\,f(x',y')\,dx'dy' \qquad (3)$$

olarak bulunur (Treves, 1975; Ghidaglia ve Saut, 1990). (3) denkleminde, K çekirdek fonksiyonu, H Heaviside fonksiyonu olmak üzere, $K(x,y,x',y') = H\big(c(x'-x) + y'-y\big)\,H\big(c(x-x') + y'-y\big)/(2c)$ ile tanımlanır.

Bu çalışmanın amacı, GDS sisteminde bulunan simetrik olmayan kuple lineer dalga denklemlerinin çözümlerinin integral gösterimlerini bulmaktır. Bu nedenle, aşağıdaki bölümde GDS sistemi kısaca tanıtılacak ve sistem, katsayıların işaretlerine göre sınıflandırılacaktır. Sonraki bölümde ise homojen olmayan kuple dalga sisteminin çözümünün integral gösterimi hesaplanacaktır. Son bölümde ise bu integral gösterimin nerede kullanılabileceği kısaca özetlenecektir.

GDS sistemi

Babaoğlu ve Erbay (2004) tarafından yapılan bir çalışmada, sonsuz elastik bir ortamda yayılan hemen hemen tek dalga sayılı dalga yayılımı modellenmiş ve üç denklemden oluşan lineer olmayan bir diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bir NLS denklemi ve iki lineer dalga denkleminden oluşan bu üçlü lineer olmayan sistemi

$$
\begin{aligned}
& iu_\tau + pu_{\xi\xi} + ru_{\eta\eta} \\
& \qquad = q\,|u|^2\,u + \frac{k^2}{2\omega}(\gamma_3\phi_{1,\xi} + \gamma_1\phi_{2,\lambda})u, \\
& (c_g^2 - c_1^2)\phi_{1,\xi\xi} - c_2^2\phi_{1,\eta\eta} - (c_1^2 - c_2^2)\phi_{2,\xi\eta} \\
& \qquad = \gamma_3 k^2(|u|^2)_\xi, \\
& (c_g^2 - c_2^2)\phi_{2,\xi\xi} - c_1^2\phi_{2,\eta\eta} - (c_1^2 - c_2^2)\phi_{1,\xi\eta} \\
& \qquad = \gamma_1 k^2(|u|^2)_\eta
\end{aligned} \tag{4}
$$

ile verilmiştir. Burada ξ ve η uzay koordinatları, τ zamanı; u kısa dalga modunun karmaşık genliğini, ϕ_1 ve ϕ_2 sırasıyla uzun boyuna ve uzun enine dalgaların reel genliklerini gösterir. Ayrıca (4) denklemindeki katsayılarda; k dalga sayısını, ω frekansı, c_g enine dalganın grup hızını, c_1 ve c_2 sırasıyla boyuna ve enine dalgaların faz hızını göstermektedir. Diğer katsayılar ise k dalga sayısına bağlı malzeme sabitleridir.

Özel durumda, $\gamma_1 = \gamma_3$ koşulu altında, (4) sisteminde $Q_\xi = \phi_{1,\xi} + \phi_{2,\eta} + \gamma_1 k^2\,|u|^2 / c_1^2$ bağımlı değişken dönüşümü uygulanır ise üç bileşenli sistem iki bileşenli DS sistemine

$$
\begin{aligned}
& iu_\tau + pu_{\xi\xi} + ru_{\eta\eta} = \bar{q}\,|u|^2\,u + \sigma Q_\xi u, \\
& (c_g^2 - c_1^2)Q_{\xi\xi} - c_1^2 Q_{\eta\eta} = \gamma(|u|^2)_\xi
\end{aligned} \tag{5}
$$

indirgenir. (5) denklemindeki katsayılar ise $\bar{q} = q - \gamma_1^2 k^4/(2\omega\, c_1^2)$, $\sigma = \gamma_1 k^2/(2\omega)$ ve $\gamma = \gamma_1 k^2 c_g^2 / c_1^2$ şeklinde tanımlanır. Bu nedenle, lineer olmayan bir dönüşümle DS sistemine indirgenen (4) sistemi GDS sistemi olarak adlandırılmıştır. Daha sonraki bir çalışmada, (4) sistemi parametre değerlerine göre sınıflandırılmıştır (Babaoğlu vd., 2004).

Bu sistemi boyutsuz halde ifade etmek için boyutsuz değişkenler, $a_1 = (c_g^2 - c_1^2)^{1/2}$ ve $a_2 = (c_g^2 - c_2^2)^{1/2}$ olmak üzere, $\tau = k^4 t$, $\eta = k^2\sqrt{r}\,y$, $\xi = a_1 k^2 \sqrt{r}\,x / c_2$, $u = a_2 c_2 \bar{u} / (\gamma_1 a_1 k^2)$, $\phi_1 = a_2 \sqrt{r/\gamma_1^2}\,\bar{\phi}_1 / a_1$ ve $\phi_2 = \sqrt{r/\gamma_1^2}\,\bar{\phi}_2$ olarak tanımlanır. Yeni boyutsuz değişkenler cinsinden (4) sistemi

$$
\begin{aligned}
& iu_t + \gamma u_{xx} + u_{yy} = \chi\,|u|^2\,u + b(\alpha\phi_{1,x} + \phi_{2,y})u, \\
& \phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} - \beta\phi_{2,xy} = \alpha\left(|u|^2\right)_x, \\
& \phi_{2,xx} - \lambda\phi_{2,yy} - \beta\phi_{1,xy} = \left(|u|^2\right)_y
\end{aligned} \tag{6}
$$

olarak yazılır (bağımlı değişkenlerin üzerindeki çizgiler yazılmamıştır). (6) sisteminin boyutsuz katsayıları ise $\gamma = pc_2^2/(ra_1^2)$, $\chi = qa_2^2c_2^2/(\gamma_1^2 a_1^2)$, $\alpha = \gamma_3 a_2 c_2/(\gamma_1 a_1^2)$, $\lambda = a_1^2 c_1^2/(a_2^2 c_2^2)$, $\beta = (c_1^2 - c_2^2)/(a_2 c_2)$ ve $b = k^4/(2\omega)$ olarak tanımlanır. $c_g^2 - c_2^2$ ifadesi her zaman pozitif olmasına rağmen, $c_g^2 - c_1^2$ ifadesinin işareti $k_c^2 = (c_1^2 - 4c_2^2 + c_1(c_1^2 + 8c_2^2)^{1/2})/(32c_2^2 m^2)$ şeklindeki kritik dalga sayısına göre değişir. Diğer bir deyişle, $k > k_c$ için $c_g^2 - c_1^2 > 0$ ve $k < k_c$ için $c_g^2 - c_1^2 < 0$ olur. O zaman k dalga sayısına göre (6) sisteminin γ ve λ katsayılarının işareti belirlenebilir. Özetle, $(\gamma,\ \lambda)$ parametrelerinin işaretleri $k > k_c$ için (+, +) ve $k < k_c$ için (–, –) dir. Bu çalışmada, EHH durumdaki GDS sistemi inceleneceği için $\gamma > 0$ olmalı, diğer bir değişle $k > k_c$ seçilmelidir. Bu seçimin $(6)_2$ ve $(6)_3$ denklemlerinin HH hali ile çelişmediğini görmek için sistemin homojen formu, k dalga sayısına göre sınıflandırılmalıdır:

$$
\begin{aligned}
& \phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} - \beta\phi_{2,xy} = 0, \\
& \phi_{2,xx} - \lambda\phi_{2,yy} - \beta\phi_{1,xy} = 0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Bu sınıflandırma, (7) denklem sistemini oluşturan operatörün özdeğerlerinin reel veya karmaşık olmasına bağlı olarak yapılacaktır. Bunun için de ikinci mertebe iki denklemden oluşan (7) sistemi, $\phi_{i,xy} = \phi_{i,yx}$ $(i = 1,2)$ uygunluk koşulları kullanılarak, birinci mertebe dört denklemden oluşan lineer bir sistem

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_x + \mathbf{B}\,\mathbf{v}_y = \mathbf{0} \tag{8}$$

olarak ifade edilir. Bilinmeyen **v** vektörünün bileşenleri ise sırasıyla, $\phi_{1,x}$, $\phi_{1,y}$, $\phi_{2,x}$ ve $\phi_{2,y}$ olarak tanımlanmıştır. Bu durumda (8) sistemini oluşturan operatörün özdeğerleri

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

matrisinin özdeğerleridir. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ matrisinin özdeğerleri, $r_1 = c_1 / c_2$ ve $r_2 = a_1 / a_2$ olmak üzere $\pm r_1$ ve $\pm r_2$ bulunur. (8) sisteminin $\pm r_1$ özdeğerleri her zaman reeldir. Sistemin diğer iki özdeğeri ise $c_g^2 - c_1^2 > 0$ $(k > k_c)$ için reel ve $c_g^2 - c_1^2 < 0$ $(k < k_c)$ için karmaşık sayıdır. Dolayısıyla (7) sistemi $k > k_c$ dalga sayıları için HH ve $k < k_c$ dalga sayıları için EH halde olur. Daha önce $(6)_1$ denkleminin eliptik olabilmesi için $k > k_c$ kabul edildiğinden (7) sistemi HH durumdadır. Bu sonuç, (6) sisteminin EHH karakterde olduğunu gösterir ve hiperbolik denklemleri sağlayan ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları için, $\xi_1 = -r_1 x + y$, $\xi_2 = r_1 x + y$, $\eta_1 = -r_2 x + y$, $\eta_2 = r_2 x + y$ karakteristik koordinatlar olmak üzere,

$$\lim_{\xi_1\to\infty}\phi_1(x,y) = \lim_{\xi_2\to\infty}\phi_1(x,y) = 0$$
$$\lim_{\xi_1\to\infty}\phi_2(x,y) = \lim_{\xi_2\to\infty}\phi_2(x,y) = 0 \tag{10}$$

şeklinde radyasyon koşullarının yazılmasına yol açar.

İntegral gösterim

Bu bölümde, simetrik olmayan kuple lineer dalga sisteminin çözümlerinin integral gösterimi bulunacaktır. İlk olarak $(6)_2$ ve $(6)_3$ dalga sistemi, $f = \alpha(|u|^2)_x$ ve $g = (|u|^2)_y$ olmak üzere,

$$\phi_{1,xx} - \phi_{1,yy} - \beta\phi_{2,xy} = f,$$
$$\phi_{2,xx} - \lambda\phi_{2,yy} - \beta\phi_{1,xy} = g \tag{11}$$

formunda yazılır. Burada f ve g fonksiyonları $f_y = \alpha\, g_x$ özelliğini sağlar. Daha sonra, (7) homojen sisteminde olduğu gibi, (11) sistemi birinci mertebe dört bilinmeyen içeren bir lineer sisteme indirgenir:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_x + \mathbf{B}\,\mathbf{v}_y = \mathbf{c}. \tag{12}$$

Burada $\mathbf{c} = (0,\ 0,\ f,\ g)^T$ olarak tanımlanır. (11) sistemininin çözümlerini elde etmek için (12) sistemi köşegenleştirilerek çözülmelidir. (9) ifadesiyle verilen $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ matrisinin $\pm r_1$, $\pm r_2$ özdeğerlerine karşı gelen özvektörler $\zeta^{(1)} = (c_1 r_1 / a_2, c_1 / a_2, r_1, 1)^T$, $\zeta^{(2)} = (c_1 r_1 / a_2, -c_1 / a_2, -r_1, 1)^T$, $\zeta^{(3)} = (-a_1 r_2 / c_2, -a_1 / c_2, r_2, 1)^T$ ve $\zeta^{(4)} = a_1 / c_2, -r_2, 1)^T$ olarak bulunur. (12) sistemini köşegenleştirmek için gerekli olan **S** matrisi $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \zeta^{(3)}, \zeta^{(4)})$ olarak tanımlanır ve $\mathbf{S}^{-1}$ ters matrisi mevcuttur. $\mathbf{w} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{v}$ koşulunu sağlayacak şekilde tanımlanan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ matrisi (12) sistemine uygulanırsa

$$\mathbf{w}_x + \mathbf{Q}\,\mathbf{w}_y = \mathbf{h} \tag{13}$$

sistemi elde edilir. Burada **Q** özdeğerlerden oluşan köşegen bir matris ve $\mathbf{h} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$, bileşenleri

$$h_1 = a_2(c_1 f + a_2 g)/(2c_g^2 r_1),$$
$$h_2 = a_2(c_1 f - a_2 g)/(2c_g^2 r_1),$$
$$h_3 = c_2(-a_1 f + c_2 g)\ /(2c_g^2 r_2) \text{ ve}$$
$$h_4 = -c_2(a_1 f + c_2 g)/(2c_g^2 r_2)$$

olan, sütun bir vektördür. (13) lineer sisteminin bileşenleri,

$$w_{1,x} - r_1 w_{1,y} = h_1, \quad w_{2,x} + r_1 w_{2,y} = h_2$$
$$w_{3,x} - r_2 w_{3,y} = h_3, \quad w_{4,x} + r_2 w_{4,y} = h_4 \tag{14}$$

şeklinde birbirinden bağımsız dört tane birinci mertebe lineer dalga denkleminden oluşur. $(14)_1$ denklemleri (ξ_1,ξ_2) ve $(14)_2$ denklemleri (η_1,η_2) karakteristik değişkenleri cinsinden ifade edilirse

$$\begin{aligned}
&-2r_1\tilde{w}_{1,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)=\tilde{h}_1(\xi_1,\xi_2),\\
&2r_1\tilde{w}_{2,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)=\tilde{h}_2(\xi_1,\xi_2),\\
&-2r_2\bar{w}_{3,\eta_1}(\eta_1,\eta_2)=\bar{h}_3(\eta_1,\eta_2),\\
&2r_2\bar{w}_{4,\eta_2}(\eta_1,\eta_2)=\bar{h}_4(\eta_1,\eta_2)
\end{aligned}\tag{15}$$

sonucu bulunur. (15) denklemlerindeki w_i ve h_i $(i=1,..,4)$ fonksiyonları (ξ_1,ξ_2) karakteristik değişkenlerine bağlı ise sırasıyla $\tilde{w}_i$ ve $\tilde{h}_i$; (η_1,η_2) karakteristik değişkenlerine bağlı ise sırasıyla $\bar{w}_i$ ve $\bar{h}_i$ notasyonu ile gösterilmiştir (ileride bu notasyon diğer fonksiyonlar için kullanılacaktır). Daha sonra; $(15)_1$ denklemi ξ_1, $(15)_2$ denklemi ξ_2, $(15)_3$ denklemi η_1, ve $(15)_4$ denklemi η_2 değişkenlerine göre integre edilirse w_i çözümleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_1&=\frac{1}{2r_1}\int_{\xi_1}^{\infty}\tilde{h}_1(\xi_1',\xi_2)\,d\xi_1'+\psi_1(\xi_2),\\
\tilde{w}_2&=-\frac{1}{2r_1}\int_{\xi_2}^{\infty}\tilde{h}_2(\xi_1,\xi_2')\,d\xi_2'+\psi_2(\xi_1),\\
\bar{w}_3&=\frac{1}{2r_2}\int_{\eta_1}^{\infty}\bar{h}_3(\eta_1',\eta_2)d\eta_1'+\psi_3(\eta_2),\\
\bar{w}_4&=\frac{-1}{2r_2}\int_{\eta_2}^{\infty}\bar{h}_4(\eta_1,\eta_2')d\eta_2'+\psi_4(\eta_1).
\end{aligned}\tag{16}$$

Burada (10) sınır koşulları göz önüne alınırsa $\psi_i=0$ olduğu görülür. Böylece (16) denklemlerinde bulunan ψ_i fonksiyonları düşer.

Bu çalışmada amaç, ϕ_i fonksiyonlarının integral formlarını bulmak olduğundan **v** matrisinin hesaplanması gereklidir. O zaman, **v**=**Sw** kullanılarak $\phi_{i,x}$ ve $\phi_{i,y}$ $(i=1,2)$ türevleri

$$\begin{aligned}
\phi_{1,x}&=\frac{c_1}{2a_2}\Big(\int_{\xi_1}^{\infty}\tilde{h}_1(\xi_1',\xi_2)\,d\xi_1'-\int_{\xi_2}^{\infty}\tilde{h}_2(\xi_1,\xi_2')d\xi_2'\Big)\\
&-\frac{a_1}{2c_2}\Big(\int_{\eta_1}^{\infty}\bar{h}_3(\eta_1',\eta_2)\,d\eta_1'-\int_{\eta_2}^{\infty}\bar{h}_4(\eta_1,\eta_2')d\eta_2'\Big),\\
\phi_{1,y}&=\frac{c_2}{2a_2}\Big(\int_{\xi_1}^{\infty}\tilde{h}_1(\xi_1',\xi_2)\,d\xi_1'+\int_{\xi_2}^{\infty}\tilde{h}_2(\xi_1,\xi_2')d\xi_2'\Big)\\
&-\frac{a_2}{2c_2}\Big(\int_{\eta_1}^{\infty}\bar{h}_3(\eta_1',\eta_2)\,d\eta_1'+\int_{\eta_2}^{\infty}\bar{h}_4(\eta_1,\eta_2')d\eta_2'\Big),\\
\phi_{2,x}&=\frac{1}{2}\Big(\int_{\xi_1}^{\infty}\tilde{h}_1(\xi_1',\xi_2)\,d\xi_1'+\int_{\xi_2}^{\infty}\tilde{h}_2(\xi_1,\xi_2')d\xi_2'\Big)\\
&+\frac{1}{2}\Big(\int_{\eta_1}^{\infty}\bar{h}_3(\eta_1',\eta_2)\,d\eta_1'+\int_{\eta_2}^{\infty}\bar{h}_4(\eta_1,\eta_2')d\eta_2'\Big),\\
\phi_{2,y}&=\frac{1}{2r_1}\Big(\int_{\xi_1}^{\infty}\tilde{h}_1(\xi_1',\xi_2)\,d\xi_1'-\int_{\xi_2}^{\infty}\tilde{h}_2(\xi_1,\xi_2')d\xi_2'\Big)\\
&+\frac{1}{2r_2}\Big(\int_{\eta_1}^{\infty}\bar{h}_3(\eta_1',\eta_2)\,d\eta_1'-\int_{\eta_2}^{\infty}\bar{h}_4(\eta_1,\eta_2')d\eta_2'\Big)
\end{aligned}\tag{17}$$

hesaplanır. (17) denklemlerindeki $\phi_{i,x}$ ve $\phi_{i,y}$ fonksiyonları ξ_i ve η_i değişkenlerine bağlıdır. x ve y bağımsız değişkenleri yerine sistemin bağımsız dört karakteristik değişken cinsinden yazılması, hesaplarda yanlışlığa yol açacaktır. Bu yanlışlığı ortadan kaldırmak amacı ile (ξ_1,ξ_2) değişkenlerinin (η_1,η_2) değişkenlerine (veya (η_1,η_2) değişkenlerinin (ξ_1,ξ_2) değişkenlerine) bağlı olduğu kabul edilmelidir. Bu ise $\phi_{i,x}$ ve $\phi_{i,y}$ fonksiyonlarının (ξ_1,ξ_2) (veya (η_1,η_2)) değişkenlerine bağlı olduğunu gösterir. Bu durumda η_i değişkenleri ξ_i değişkenlerine aşağıdaki gibi bağlıdır:

$$\begin{aligned}
\eta_1&=\frac{r_1+r_2}{2r_1}\xi_1+\frac{r_1-r_2}{2r_1}\xi_2,\\
\eta_2&=\frac{r_1-r_2}{2r_1}\xi_1+\frac{r_1+r_2}{2r_1}\xi_2.
\end{aligned}\tag{18}$$

ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonlarının açık formlarını elde etmek için kartezyen değişkenlere göre türev yerine karakteristik değişkenlere göre hesaplanmış türevlere gerek vardır. Bunun için $\phi_{i,\xi_1}=(-\phi_{i,x}/r_1+\phi_{i,y})/2$ ve $\phi_{i,\xi_2}=(\phi_{i,x}/r_1$

$+\phi_{i,y})/2$ eşitliklerinde (17) sonuçları kullanılırsa, (ξ_1,ξ_2) karakteristik değişkenlerine bağlı, ϕ_{i,ξ_1} ve ϕ_{i,ξ_2} ifadeleri elde edilir. Daha sonra, ϕ_{1,ξ_1} ifadesi ξ_1 değişkenine göre integre edilir ve sonuç ξ_2 değişkenine göre türetilerek ϕ_{1,ξ_2} ifadesiyle karşılaştırılır. Benzer işlemler ϕ_2 fonksiyonu için de tekrarlandıktan sonra, ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları

$$\tilde{\phi}_1 = -\frac{c_2}{2a_2} I_1 + \frac{a_2(r_1-r_2)}{4c_1} I_2 + \frac{a_2(r_1+r_2)}{4c_1} I_3,$$
$$\tilde{\phi}_2 = \frac{1}{2r_1} I_1 - \frac{r_1-r_2}{4r_1r_2} I_2 + \frac{r_1+r_2}{4r_1r_2} I_3 \quad (19)$$

olarak bulunur. (19) ifadelerindeki I_i $(i=1,2,3)$ integralleri ise

$$I_1 = \int_{R^2} H(\xi_1^{'}-\xi_1)H(\xi_2^{'}-\xi_2)\tilde{h}_2(\xi_1^{'},\xi_2^{'})d\xi_2^{'}d\xi_1^{'},$$
$$I_2 = \int_{R^2} H(\xi_1^{'}-\xi_1)H(\eta_1^{'}-\frac{r_1+r_2}{2r_1}\xi_1^{'}-\frac{r_1-r_2}{2r_1}\xi_2)$$
$$\bar{h}_3(\eta_1^{'},\frac{r_1-r_2}{2r_1}\xi_1^{'}+\frac{r_1+r_2}{2r_1}\xi_2)d\eta_1^{'}d\xi_1^{'},$$
$$I_3 = \int_{R^2} H(\xi_1^{'}-\xi_1)H(\eta_2^{'}-\frac{r_1-r_2}{2r_1}\xi_1^{'}-\frac{r_1+r_2}{2r_1}\xi_2)$$
$$\bar{h}_4(\frac{r_1+r_2}{2r_1}\xi_1^{'}+\frac{r_1-r_2}{2r_1}\xi_2,\eta_2^{'})d\eta_2^{'}d\xi_1^{'} \quad (20)$$

şeklinde tanımlanır. (19) denklemindeki ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları (ξ_1,ξ_2) değişkenlerine bağlı olduğu için (20) integrallerindeki integrantlar da (ξ_1,ξ_2) değişkenlerine bağlı olmalıdır. Bu yüzden, I_2 integralinde $r_1 \neq r_2$ için $\eta_1^{'} = [(r_1+r_2)\xi_1^{''}+(r_1-r_2)\xi_2^{''}]/(2r_1)$ ve $\xi_1^{'} = \xi_1^{''}+(r_1+r_2)(\xi_2^{''}-\xi_2)/(r_1-r_2)$ değişken dönüşümü; I_3 integralinde $\xi_1^{'} = \xi_1^{''}+(r_1-r_2)(\xi_2^{''}-\xi_2)/(r_1-r_2)$ ve $\eta_2^{'} = [(r_1-r_2)\xi_1^{''}+(r_1+r_2)\xi_2^{''}]/(2r_1)$ değişken dönüşümü uygulanır ise (ξ_1,ξ_2) karakteristik değişkenlerine bağlı ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları

$$\tilde{\phi}_1 = -\frac{c_2}{2a_2} I_1 + \frac{a_1}{2c_1}(I_4+I_5),$$
$$\tilde{\phi}_2 = \frac{1}{2r_1}(I_1-I_4+I_5) \quad (21)$$

olarak elde edilir. (21) denklemlerindeki I_i $(i=4,5)$ integralleri ise

$$I_4 = \int_{R^2} H(\xi_1^{'}-\xi_1+\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}(\xi_2^{'}-\xi_2))$$
$$H(\frac{-2r_2}{r_1-r_2}(\xi_2^{'}-\xi_2))\tilde{h}_3(\xi_1^{'},\xi_2^{'})d\xi_1^{'}d\xi_2^{'},$$
$$I_5 = \int_{R^2} H(\xi_1^{'}-\xi_1+\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}(\xi_2^{'}-\xi_2))$$
$$H(\frac{2r_2}{r_1+r_2}(\xi_2^{'}-\xi_2))\tilde{h}_4(\xi_1^{'},\xi_2^{'})d\xi_1^{'}d\xi_2^{'} \quad (22)$$

olarak tanımlanır. Böylece $r_1 \neq r_2$ için kuple lineer dalga sisteminin integral gösterimi (ξ_1,ξ_2) karakteristik değişkenleri cinsinden elde edilir. Bu integral gösterimin (x,y) kartezyen koordinatlardaki ifadesi ise

$$\phi_1 = \int_{R^2} K_1(x',y',x,y)f(x',y')dx'dy'$$
$$+\int_{R^2} K_2(x',y',x,y)g(x',y')dx'dy',$$
$$\phi_2 = \int_{R^2} K_2(x',y',x,y)f(x',y')dx'dy'$$
$$+\int_{R^2} K_3(x',y',x,y)g(x',y')dx'dy' \quad (23)$$

şeklindedir. (23) denklemindeki K_i çekirdek fonksiyonları ise,

$$H_1 = H(-r_1(x'-x)+y'-y),$$
$$H_2 = H(r_1(x'-x)+y'-y),$$
$$H_3 = H(2r_1(r_2(x'-x)+y'-y)/(r_1-r_2)),$$
$$H_4 = H(-2r_2(r_1(x'-x)+y'-y)/(r_1-r_2)),$$
$$H_5 = H(2r_1(-r_2(x'-x)+y'-y)/(r_1+r_2)) \text{ ve}$$
$$H_6 = H(2r_2(r_1(x'-x)+y'-y)/(r_1+r_2))$$

olmak üzere,

$$K_1 = -[c_1c_2H_1H_2 + a_1a_2(H_3H_4+H_5H_6)]/(2c_g^2),$$

$$K_2 = a_2 c_2 (H_1 H_2 + H_3 H_4 - H_5\, H_6)/(2c_g^2) \text{ ve}$$
$$K_3 = -[a_1 a_2 H_1 H_2 + c_1 c_2 (H_3 H_4 + H_5 H_6)]/(2c_g^2 r_1 r_2)$$

olarak tanımlanır (Eden vd., 2008).

Özel olarak, $r_1 = r_2$ kabul edilirse $r_1 = r_2 = 1$ olduğu görülür. Bu durumda, (11) dalga denklemlerinde bulunan karışık türevli ifadeler düşer ($\beta = 0$). $\xi_1 = -x + y$ ve $\xi_2 = x + y$ karakteristik koordinatlardaki ϕ_1 ve ϕ_2 çözümleri,

$$I_1 = \int_{R^2} H(\xi_1' - \xi_1) H(\xi_2' - \xi_2) \tilde{h}_2(\xi_1', \xi_2')\, d\xi_1' d\xi_2',$$
$$I_3 = \int_{R^2} H(\xi_1' - \xi_1) H(\xi_2' - \xi_2) \tilde{h}_4(\xi_1', \xi_2')\, d\xi_1' d\xi_2' \quad (24)$$

olmak üzere,

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{-c_1}{2a_1} I_1 + \frac{a_1}{2c_1} I_3,\; \tilde{\phi}_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_3 \quad (25)$$

formuna indirgenir. Bu çözümler, tek dalga denkleminin çözümlerinin integral gösterimiyle çakışır.

Sonuçlar

Bu çalışmada, kuple lineer dalga sisteminin çözümlerinin integral gösterimi hesaplanmıştır. Sistemin simetrik olmayan yapısı çözüm için yapılan hesaplarda karışıklıklara yol açmıştır. Bu karışıklıklar, sistemin çözümünün integral gösteriminde yer alan çekirdek fonksiyonlarındaki Heaviside fonksiyonlarının argümanlarına yansımıştır. İntegral gösterimin en pratik uygulamalarından biri, bazı önkestirimlerin hesaplanmasına olanak vermesidir. Diğer bir uygulama ise, EHH durumdaki GDS sisteminin yerel olmayan NLS denklemine indirgenmesidir. İndirgenmiş NLS denklemini bulmak için K_1 ve K_2 integral operatörler, sırasıyla $(23)_1$ ve $(23)_2$ denklemlerindeki integraller olarak tanımlanırsa $\phi_1 = K_1(f, g)$ ve $\phi_2 = K_2(f, g)$ yazılır. O zaman (6) sisteminin yerel olmayan NLS denklemine indirgenmiş formu

$$\begin{aligned} iu_t + \gamma u_{xx} + u_{yy} &= \chi |u|^2 u \\ &+ \alpha b u\, [K_1(\alpha(|u|^2)_x, (|u|^2)_y)]_x \\ &+ bu\, [K_2(\alpha(|u|^2)_x, (|u|^2)_y)]_y \end{aligned} \quad (26)$$

ile verilir. GDS sisteminin indirgenmiş formu olan (26) denklemi kullanılarak; DS sisteminde olduğu gibi, GDS sisteminin lokalize çözümleri bulunabilir, çözümlerinin varlık ve tekliği, patlayan çözümleri v.b. konulardaki analitik incelemeler yapılabilir.

Kaynaklar

Ablowitz, M.J. ve Segur, H., (1979). On the evolution of packets of water waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **92**, 691-715.

Babaoglu, C. ve Erbay, S., (2004). Two-dimensional wave packets in an elastic solid with couple stresses, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **39**, 941-949.

Babaoglu, C., Eden, A. ve Erbay, S., (2004). Global existence and nonexistence results for a generalized Davey-Stewartson system, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **37**, 11531-11546.

Davey, A. ve Stewartson, K., (1974). On three dimensional packets of surface waves, *Proceedings of the Royal Society of London*, **A338**, 101-110.

Djordjevic, V.D. ve Redekopp, L.G., (1977). On two-dimensional packets of capillary-gravity waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **79**, 703-714.

Eden, A., Erbay, S. ve Hacinliyan, I., (2008). Reducing a generalized Davey-Stewartson system to non-local nonlinear Schrödinger equation, *Chaos, Solitons & Fractals* (yayına kabul edildi).

Fokas, A.S. ve Santini, P.M., (1990). Dromions and a boundary value problem for the Davey-Stewartson I equation, *Physica D*, **44**, 99-130.

Ghidaglia, J.M. ve Saut, J.C., (1990). On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems, *Nonlinearity*, **3**, 475-506.

Radha, R. ve Lakshmanan, M., (1997). Localized coherent structures and integrability in a generalized (2+1) dimensional nonlinear Schrödinger equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **8**, 17-25.

Treves, F., (1975). *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, San Diego.