itüdergisi/*c*
fen bilimleri
Cilt:8, Sayı:1, 81-88
Kasım 2010

Projektif düz Randers metriklerinde Kropina dönüşümü

Salim CEYHAN*, Gülçin ÇİVİ

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

$n-$boyutlu bir M manifoldu üzerinde $\alpha=\alpha(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ bir Riemann metriği ve $\beta=\beta(x,y)=b_i(x)y^i$ bir diferansiyel $1-$form olsun. $\phi(s)$, $\left(-b_0,b_0\right)$ aralığında C^∞ sınıfından $\phi(s)-s\phi'(s)+(b^2-s^2)\phi''(s)>0,\ \ |s|\le b<b_0$ koşulunu sağlayan pozitif bir fonksiyon olmak üzere, $F(x,y)=\alpha\,\phi(s),\ (s=\beta/\alpha)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Herhangi bir $x\in M$ için $\|\beta_x\|_\alpha=\sqrt{a^{ij}(x)b_ib_j}\le b_0$ ise, F fonksiyonu bir Finsler metriği oluşturur. Bu şekilde tanımlanan Finsler metriklerine $(\alpha,\beta)-$metriği adı verilir. $\phi(s)=1+s$ alınırsa $(\alpha,\beta)-$metriklerinin özel bir sınıfını oluşturan $F=\alpha+\beta$ Randers metriği elde edilir. $F_n^*=(M,F^*)$ ve $F_n=(M,F)$, sırasıyla, $F^*=F^*(x,y)$ ve $F=F(x,y)$ metriklerine sahip iki Finsler uzayı olsun. $F^*(x,y)=\dfrac{F^2(x,y)}{\beta(x,y)}$ ile tanımlanan $\rho:F\to F^*$ metrik dönüşümüne bir Kropina dönüşümü denir (Singh, Prasad ve Kumari, 2003). Özel olarak, F bir Riemann uzayının metriği olarak alınırsa, F^*, bir Kropina uzayının metriğine indirgenmiş olur (Shen, 2001). Bu çalışmada, öncelikle aralarında bir Kropina dönüşümü tanımlı olan iki Finsler uzayının sprey katsayıları arasındaki ilişki elde edilmiştir. Daha sonra, bir Randers metriğinin projektif düz olması için gerek ve yeter olan koşulların, bu ilişkide kullanılması ile "projektif-düz bir Randers uzayını, projektif-düz bir Finsler uzayına dönüştüren Kropina dönüşümü" için gerek ve yeter koşul elde edilmiş ve bu koşul altında Finsler dönüşüm uzayının skaler flag eğriliği elde edilmiştir.

***Anahtar Kelimeler**: Kropina dönüşümü, Randers metrikleri, R-eğrilik, flag eğrilik, skaler flag eğrilik.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Salim CEYHAN. salimceyhan@ttmail.com; Tel: (262) 412 02 98.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Genelleştirilmiş Douglas metrikli Kropina uzayları" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 24.02.2009 tarihinde dergiye ulaşmış, 26.05.2009 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.04.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

The Kropina change of the projectively flat Randers metrics

Extended abstract

Let M be a manifold. A function $F = TM \to [0,\infty)$ *satisfying the following properties is called a Finsler metric:*

a) F is C^∞ *on* $TM_0 = TM \setminus \{0\}$

b) for any $x \in M$ *,* $F_x(y) = F(x,y)$ *is a Minkowski norm on* T_xM *.*

The pair (M,F) is called a Finsler space.

Let $\alpha = \alpha(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ *be a Riemannian metric and* $\beta = \beta(x,y) = b_i(x)y^i$ *be a differential* $1-$*form on an* $n-$*dimensional manifold* M *. Consider the function* $F = \alpha\phi(s)$, $(s = \beta/\alpha)$ *where* $\phi = \phi(s)$ *is a positive* C^∞ *function on* $(-b_0, b_0)$ *and satisfying* $\phi(s) - s\phi'(s) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0$, $|s| \le b < b_0$. *Then,* F *is a Finsler metric if* $\|\beta_x\|_\alpha = \sqrt{a^{ij}(x)b_i b_j} \le b_0$ *for any* $x \in M$ *(Shen Z., 2001). If* $\phi(s) = 1 + s$ *then* $F = \alpha\phi(s)$ *becomes* $F = \alpha + \beta$ *Randers metric.*

Every Finsler metric F *and the spray coefficients* G_F^i *of* F *induce a spray* $G_F = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G_F^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ *which determines the geodesics of M (Shen Z., 2001, Abate and Patrizio, 1994). And the spray coefficients* G_F^i *of F are*

$$G_F^i = \frac{1}{4} g^{il} \left\{ \left[F^2\right]_{x^k y^l} y^k - \left[F^2\right]_{x^l} \right\}.$$

A geodesic on a Finsler space is given by the differential equation $\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G_F^i(x, \frac{dx}{dt}) = 0.$

A Finsler metric $F = F(x,y)$ *on an open subset* $u \subset R^n$ *is projectively flat if and only if it satisfies the following system of equations (Rapcsák, 1961),* $F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l} = 0$. *In this case, the spray coefficients of* F *are* $G_F^i = Py^i$*, where* $P = P(x,y)$ *is given by* $P = \frac{F_{x^k} y^k}{2F}$. *The scalar function* P *is called the projective factor of* F *.*

The Riemann curvature $R_y : T_xM \to T_xM$ *of a manifold with a Berwald connection is defined by*

$$R_k^i = 2\frac{\partial G_F^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G_F^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G_F^j \frac{\partial^2 G_F^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G_F^i}{\partial y^j}\frac{\partial G_F^j}{\partial y^k}.$$

For a tangent plane $P \subset T_xM$ *containing* $y \in T_xM$*, the flag curvature* $K = K(P,y)$ *is defined by*

$$K(P,y) = \frac{g_y(R_y(u),u)}{g_y(y,y)g_y(u,u) - [g_y(y,u)]^2} \quad ,$$

where $u \in P$ *such that* $P = span\{y,u\}$. *If* $K(P,y) = K(x,y)$ *(a scalar function),* F *is said to be of scalar flag curvature. If* $K(P,y) = constant$*,* F *is said to have a constant flag curvature (Bao and Robles, 2004, Shen Z., 2004).*

The transformation of the Finsler metric F *given by* $F^*(x,y) = \frac{F^2(x,y)}{\beta(x,y)}$ *is called a Kropina change* F *. If* $F(x,y)$ *is a metric function of a Riemannian space, then* $F^*(x,y)$ *reduces to the metric function of the Kropina space.*

In this work, a Kropina change of the metric function given by $F^*(x,y) = \frac{F^2(x,y)}{\beta(x,y)}$ *between projectively flat Randers space* F_n *with metric* F *and the Finsler space* F_n^* *with metric* F^* *is studied and it is proved that the Finsler space* F_n^* *is projectively flat under a Kropina change if and only if the differential equation* $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k} y^k = 0$ *is satisfied. Next, it is shown that for a Kropina change between a projectively flat Randers space* F_n *and a projectively flat Finsler space* F_n^* *, the scalar flag curvature of* F_n^* *is*

$$K^* = \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^4}(p^2 - y^i \partial_i p).$$

Keywords: *Kropina change, Randers metrics,* R*-curvature, flag curvature, scalar flag curvature.*

Giriş

Bir V vektör uzayında tanımlı negatif olmayan bir $F:V\to[0,\infty)$ fonksiyonu herhangi bir $y\in V$ için aşağıdaki özelliklere sahip ise bir Minkowski normudur:

1) $F(y)\geq 0$ ve $F(y)=0\Leftrightarrow y=0$,
2) $\lambda>0$ için, $F(\lambda y)=\lambda F(y)$, yani, F birinci dereceden pozitif y-homojen,
3) $V\setminus\{0\}$ üzerinde F, C^∞ sınıfından ve V üzerindeki

$$g_y(u,v)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left[F^2(y+su+tv)\right]\Big|_{t=s=0}$$

simetrik bilineer formu bir iç çarpımdır. g_y iç çarpımı, y doğrultusundaki esas form ve (V,F) çifti de bir Minkowski uzayı adını alır.

M, C^∞ sınıfından n-boyutlu bağlantılı diferansiyellenebilir bir manifold ve $TM=\bigcup T_xM$, $(x\in M)$, M'nin teğet uzayı demeti olsun. Burada T_xM, $x\in M$ noktasındaki teğet uzaydır. Bir $F:TM\to[0,\infty)$ fonksiyonuna aşağıdaki özellikleri sağladığında bir Finsler metriği adı verilir:

a) $TM\setminus\{0\}$da F, C^∞ sınıfından,
b) Herhangi bir $x\in M$ noktasında, $F_x=F|_{T_xM}$, T_xM uzayında bir Minkowski normudur.

(M,F) çiftine de bir Finsler uzayı denir. Lokal koordinatlarda, bir Finsler uzayının $g_{ij}=g_{ij}(x,y)$ metrik tensörü

$$g_{ij}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}F^2(x,y)$$

ile verilir. Burada (x,y), TM uzayında bir noktadır. Bu nedenle Finsler uzayları metrik tensörü $g_{ij}(x)$ olan Riemannian uzayların, bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Finsler geometrisinde, Finsler metrikleri geometrik özelliklerine göre çok çeşitli sınıflara ayrılır. Bir manifold üzerinde gerekli koşulları sağlayan birçok Riemannian ve Riemannian olmayan Finsler metrikleri vardır.

$\phi(s)$, $(-b_0,b_0)$ aralığında C^∞ sınıfından

$$\phi(s)-s\phi'(s)+(b^2-s^2)\phi''(s)>0,\quad |s|\leq b_0 \qquad (1)$$

şartını sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. Burada $\phi'=\frac{d\phi}{ds}$ dir. Herhangi bir $x\in M$ için $\|\beta_x\|_\alpha=\sqrt{a^{ij}(x)b_ib_j}\leq b_0$ ise,

$$F=\alpha\phi(s),\ s=\frac{\beta}{\alpha},\ \left(\alpha=\alpha(x,y),\ \beta=\beta(x,y)\right) \qquad (2)$$

fonksiyonu bir Finsler metriğidir (Shen, 2001). (2) ile tanımlanan Finsler metriklerine (α,β)-metrikleri denir. Burada $\alpha(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ Riemannian bir metrik ve $\beta(x,y)=b_i(x)y^i$ diferansiyel $1-$formdur (Senerath vd., 2007, Shen, 2001). $\phi(s)=1+s$ alınırsa (α,β)-metriklerinin özel bir sınıfını oluşturan $F=\alpha+\beta$ Randers metriği elde edilir.

Her F Finsler metriği ve F metriğinin G_F^i sprey katsayıları, geodezikleri veren bir $G_F=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G_F^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ spreyini meydana getirir. Bir F Finsler metriğinin sprey katsayıları

$$G_F^i=\frac{1}{4}g^{il}\left\{\left[F^2\right]_{x^ky^l}y^k-\left[F^2\right]_{x^l}\right\} \qquad (3)$$

şeklinde verilir (Shen, 2001).

$$G_F^i(x,\lambda y)=\lambda^2G_F^i(x,y),\quad \lambda>0$$

sprey katsayıları ikinci dereceden pozitif y-homojen fonksiyonlardır.

Bir Finsler uzayı üzerinde bir geodezik

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2G_F^i\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=0$$

diferansiyel denklemleri ile verilir. (α,β)-metrikli bir Finsler metriğinin sprey katsayıları ile α Riemann metriğinin sprey katsayıları arasındaki ilişki (3) de $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ alınarak,

$$G_F^i=G_\alpha^i+\frac{\alpha\phi'}{\phi-s\phi'}s_0^i+\frac{\phi\phi'-s(\phi\phi''+\phi'\phi')}{2\phi[(\phi-s\phi')+(b^2-s^2)\phi'']}\left(\frac{-2\alpha\phi'}{\phi-s\phi'}s_0+r_{00}\right)\left(\frac{y^i}{\alpha}+\frac{\phi\phi''}{\phi\phi'-s(\phi\phi''+\phi'\phi')}b^i\right) \quad (4)$$

veya kapalı formda

$$G_F^i=G_\alpha^i+Py^i+\Omega^i$$

olarak elde edilir (Shen, 2001). Burada

$$r_{00}=r_{ij}y^iy^j,\ s_0^i=s_j^iy^j,\ s_0=s_{ij}b^iy^j,b^2=b^ib_i,$$
$$r_{ij}=\frac{b_{i;j}+b_{j;i}}{2},\ s_{ij}=\frac{b_{i;j}-b_{j;i}}{2}$$

dir ve ‘ ; ’ Riemann metriğine göre kovaryant türev alınacağını göstermektedir. Berwald, herhangi bir yerel koordinat sisteminde bir F Finsler metriğinin (3) ile verilen sprey katsayılarının

$$G_{Fj}^i=\frac{\partial G_F^i}{\partial y^j},\ G_{Fjk}^i=\frac{\partial G_{Fj}^i}{\partial y^k}$$

türevleri yardımıyla $B\Gamma(G_{F\,jk}^i,G_{Fj}^i,0)$ Berwald konneksiyonunu tanımlamıştır (Szabo, 1981). Burada $G_{Fjk}^i(x,y)$ ifadesi alt indislerine göre simetriktir.

Berwald tanımladığı Berwald konneksiyonu ile Riemanian geometrideki Riemann tensörünü Finsler metriklerine genişletmiştir. Buna göre, $R_y:T_xM\to T_xM$ Riemann eğriliği Berwald konneksiyonlu bir manifold üzerinde

$$R_k^i=2\frac{\partial G_F^i}{\partial x^k}-y^j\frac{\partial^2G_F^i}{\partial x^j\partial y^k}+2G_F^j\frac{\partial^2G_F^i}{\partial y^j\partial y^k}-\frac{\partial G_F^i}{\partial y^j}\frac{\partial G_F^j}{\partial y^k} \quad (6)$$

ile tanımlanır (Shen, 2002).

Bir $y\in T_xM$ vektörünü içeren bir $P\subset T_xM$ teğet düzlemi için, $u\subset P$ ve $P=span\{y,u\}$ olmak üzere,

$$K(P,y)=\frac{g_y(R_y(u),u)}{g_y(y,y)g_y(u,u)-[g_y(y,u)]^2} \quad (7)$$

şeklinde tanımlanan $K=K(P,y)$ büyüklüğüne flag eğrilik adı verilir. Eğer K büyüklüğü, $K(P,y)=K(x,y)$ şeklinde bir skaler fonksiyon ise F skaler flag eğrilikli, $K(P,y)=sbt.$ ise F sabit flag eğriliklidir denir. Eğer bir Finsler uzayı skaler flag eğrilikli ise, R_k^i Riemann eğriliği ve K flag eğriliği arasındaki ilişki

$$R_k^i=KF^2h_k^i \quad (8)$$

şeklindedir (Shen, 2002). Burada $h_k^i=h_{kl}g^{li}$ açısal metrik tensördür.

Projektif düz Finsler metrikleri

Hamel (1903) ve Rapcs´ak (1961) R^n nin açık bir alt kümesinde projektif düz bir Finsler metriğini karakterize etmek için basit bir kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi elde etmiştir. R^n nin açık bir alt kümesinde bir $F=F(x,y)$ Finsler metriğinin projektif düz olması için gerek ve yeter koşul

$$F_{x^ky^l}y^k-F_{x^l}=0 \quad (9)$$

kısmi türevli diferansiyel denklem sistemini sağlamasıdır (Rapcsak, 1961; Hamel, 1903). (9) dan projektif düz bir Finsler metriğinin sprey katsayıları için

$$\begin{aligned}G^i(x,y)&=\frac{1}{4}g^{il}(x,y)\left\{\left[F^2\right]_{x^ky^l}y^k-\left[F^2\right]_{x^l}\right\}\\&=\frac{1}{2}g^{il}(x,y)g_{ml}(x,y)y^mF_{x^k}y^k\\&=\frac{F_{x^k}(x,y)y^k}{2F(x,y)}y^i\end{aligned} \quad (10)$$

bulunur. Burada

$$P(x,y)=\frac{F_{x^k}(x,y)y^k}{2F(x,y)} \tag{11}$$

olarak alınırsa, bir M manifoldu üzerinde tanımlı bir F Finsler metriğinin projektif düz olması için gerek ve yeter koşul

$$G^i(x,y)=P(x,y)y^i \tag{12}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada (11) ile verilen $P(x,y)$ projektif çarpanı, pozitif birinci dereceden $y-$homojen fonksiyondur.

Yardımcı Teorem. $F=\alpha+\beta$ Randers metriğinin projektif düz olması için gerek ve yeter koşul, α Riemann metriğinin projektif düz ve β diferansiyel $1-$formunun kapalı olmasıdır (Shen, 2001; 2002).

Finsler uzayının Kropina dönüşümleri

$F_n^*=(M,F^*)$ Finsler uzayının $F^*(x,y)$ metrik fonksiyonu ile $F_n=(M,F)$ Finsler uzayının $F(x,y)$ metrik fonksiyonu arasındaki ilişki

$$F^*(x,y)=\frac{F^2(x,y)}{\beta(x,y)} \tag{13}$$

şeklinde tanımlı ise $\rho:F\to F^*$ dönüşümüne Kropina dönüşümü adı verilir (Singh vd., 2003). Burada $\beta(x,y)=b_i(x)y^i$ diferansiyel $1-$formdur. Eğer, (13) dönüşümünde $F(x,y)$ Finsler metriği α Riemann metriği olarak alınırsa,

$$F^*(x,y)=\frac{\alpha^2}{\beta}$$

Kropina metriği elde edilir.

F_n^* Finsler uzayının metrik tensörünün g_{ij}^* kovaryant bileşenleri ile g^{*ij} kontravaryant bileşenleri ve h_{ij}^* açısal metrik tensörü, sırasıyla,

$$\begin{aligned} g_{ij}^* &= 2\beta^{-2}F^2(g_{ij}+2l_il_j)-4\beta^{-3}F^3\\ &\quad (l_ib_j+l_jb_i)\ +3\beta^{-4}F^4b_ib_j, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} g^{*ij} &= \beta^2F^{-2}\{2^{-1}(g^{ij}-b^{-2}b^ib^j)+(1-2\beta^2F^{-2}b^{-2})\\ &\quad l^il^j+\beta^3F^{-3}b^{-2}(l^ib^j+l^jb^i) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} h_{ij}^* &= g_{ij}^*-l_i^*l_j^*=F^*\dot{\partial}_i\dot{\partial}_jF^*\\ &=2\beta^{-2}F^2(h_{ij}+l_il_j)-2\beta^{-3}F^3(l_ib_j+l_jb_i)\\ &\quad +2\beta^{-4}F^4b_ib_j \end{aligned} \tag{16}$$

dir (Singh vd., 2003). Burada $\dot{\partial}_iF=l_i$ ve $h_{ij}=g_{ij}-l_il_j=F\dot{\partial}_i\dot{\partial}_jF$ 'dir.

(3) eşitliği F^* metriği için yazılır ve (13) ve (15) kullanılırsa G_F^i ve $G_{F^*}^i$ sprey katsayıları arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} G_{F^*}^i &= G_F^i+\Big[\frac{\beta}{Fb^2}(F_{x^ky^j}y^k - F_{x^j})b^j - \frac{1}{2b^2}(\beta_{x^ky^j}y^k\\ &\quad -\beta_{x^j})b^j - \frac{\beta}{F^2b^2}\beta_{x^k}y^k+\frac{\beta^2}{F^3b^2}F_{x_k}y^k\Big]y^i\\ &\quad +\Big[-\frac{F}{2b^2}(F_{x^ky^j}y^k - F_{x^j})b^j+\frac{F^2}{4\beta b^2}(\beta_{x^ky^j}y^k\\ &\quad -\beta_{x^j})b^j+\frac{1}{2b^2}\beta_{x^k}y^k - \frac{\beta}{2Fb^2}F_{x_k}y^k\Big]b^i\\ &\quad -\frac{F^2}{4\beta}g^{ij}(\beta_{x^ky^j}y^k - \beta_{x^j}) \end{aligned} \tag{17}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem. $n>2$ için F_n ve F_n^*, sırasıyla, F metrikli bir projektif düz Randers uzayı ve F^* metrikli bir Finsler uzayı olsun. $\rho:F\to F^*$ Kropina dönüşümü altında F_n^* Finsler uzayının projektif düz bir uzay olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k}y^k=0 \tag{18}$$

olmasıdır.

İspat. Hipotez gereğince, $F=\alpha+\beta$ Randers metriği projektif düz olduğundan $F_{x^k y^l} y^k - F_{x^l} = 0$ ve sprey katsayıları $G_F^i = py^i$, $p=\dfrac{F_{x^k} y^k}{2F}$ şeklindedir ve Yardımcı Teoreme göre,

$$G_\alpha^i = Py^i \quad \text{veya} \quad \alpha_{x^k y^j} y^k - \alpha_{x^j} = 0 \tag{19}$$

ve

$$s_0^i = 0 \quad \text{veya} \quad \beta_{x^k y^j} y^k - \beta_{x^j} = 0 \tag{20}$$

dır. (19) ve (20) koşulları altında (17) ilişkisi

$$\begin{aligned} G_{F^*}^i &= G_F^i + Py^i + Qb^i \\ &= (p+P)y^i + Qb^i \end{aligned} \tag{21}$$

şeklini alır. Burada,

$$\begin{aligned} P &= \frac{\beta^2}{F^3 b^2} F_{x^k} y^k - \frac{\beta}{F^2 b^2} \beta_{x^k} y^k \\ &= \frac{\beta}{F^2 b^2}(2\beta p - \beta_{x^k} y^k), \\ Q &= -\frac{\beta}{2Fb^2} F_{x^k} y^k + \frac{1}{2b^2} \beta_{x^k} y^k \\ &= -\frac{1}{2b^2}(2\beta p - \beta_{x^k} y^k) \end{aligned} \tag{22}$$

dır.

F_n^* uzayı projektif düz olsun. Bu durumda F^* metriğinin sprey katsayıları ve projektif çarpanı, sırasıyla,

$$G_{F*}^i = P^* y^i$$

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{F^*_{x^k} y^k}{2F^*} = \frac{(F^2/\beta)_{x^k} y^k}{2(F^2/\beta)} \\ &= 2p - \frac{1}{2\beta} \beta_{x^k} y^k \end{aligned}$$

şeklinde olacağından (21) den

$$(P^* - p - P)\, y^i = Qb^i \tag{23}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının b_i ile daraltılması ve P^*, p ve P 'nin değerlerinin yerine yazılması ile

$$\left(1 - \frac{\beta^2}{F^2 b^2}\right)\left(2p\beta - \beta_{x^k} y^k\right) = 0 \tag{24}$$

elde edilir. $n>2$ için $b^2 \neq 0$ dır (Hashiguchi, Hojo ve Matsumoto, 1996). Diğer taraftan, (24) deki ilk çarpanın sıfır olması halinde $b^2 = 0$ olduğu kolayca görülür. Buna göre, $n>2$ için

$$1 - \frac{\beta^2}{F^2 b^2} \neq 0$$

dır ve (24) denkleminin sağlanması ancak

$$2p\beta - \beta_{x^k} y^k = 0 \tag{25}$$

ile mümkündür. Burada $p = \dfrac{F_{x^k} y^k}{2F}$ olduğu dikkate alınarak,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{x^k} y^k = 0 \tag{26}$$

elde edilir. Tersine olarak, (26) sağlandığında $P=Q=0$ 'dır. Bu durumda, (21)'den F^* 'ın projektif düz olduğunu gösteren

$$\begin{aligned} G_{F*}^i &= (p+P)y^i + Qb^i \\ &= py^i \end{aligned}$$

bulunur. Burada $p=\dfrac{F_{x^k} y^k}{2F}$ ve $P=0$ 'ın dikkate alınmasıyla,

$$p = \frac{\beta_{x^k} y^k}{2\beta} = \frac{(\alpha+\beta)_{x^k} y^k}{2(\alpha+\beta)}$$

elde edilir.

Sonuç. F_n projektif düz Randers uzayını F_n^* projektif düz bir Finsler uzayına dönüştüren

$$\rho : F \to F^* = \frac{F^2}{\beta}, \quad (n > 2)$$

Kropina dönüşümü altında, projektif düz Randers uzayının projektif çarpanı ve sprey katsayıları invaryant kalır.

Yardımcı Teorem. Herhangi bir projektif düz Finsler metriği skaler flag eğriliklidir (Hamel, 1903, Rapcs´ak, 1961).

Teorem. $\rho : F(x,y) \to F^*(x,y) = \dfrac{F^2(x,y)}{\beta(x,y)}$ dönüşümü projektif düz bir F_n Randers uzayını projektif düz bir Finsler uzayına dönüştüren bir Kropina dönüşümü ise, F_n^* nin skaler flag eğriliği

$$K^* = \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^4}(p^2 - y^i \partial_i p) \qquad (27)$$

şeklindedir. Burada $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 'dir.

İspat. F_n^* uzayının

$$R^{*i}_{ljk} = \partial_k G^i_{F^*jl} - \partial_j G^i_{F^*kl} + G^i_{F^*kr} G^r_{F^*jl} - G^i_{F^*jr} G^r_{F^*kl}$$

ile verilen R-eğrilik tensörü y^j ve y^l ile çarpılır j ve üzerine toplam alınırsa

$$\begin{aligned} R^{*i}_k &= y^l y^j R^{*i}_{ljk} \\ &= 2\partial_k G^i_{F^*} - y^j \partial_j G^i_{F^*k} - G^i_{F^*r} G^r_{F^*k} + 2G^i_{F^*kr} G^r_{F^*} \end{aligned} \qquad (28)$$

olur. Burada $k = i$ alındığında

$$R^{*i}_i = 2\partial_i G^i_{F^*} - y^j \partial_j G_{F^*} - G^i_{F^*r} G^r_{F^*i} + 2G_{F^*r} G^r_{F^*} \qquad (29)$$

elde edilir. Yardımcı Teorem dikkate alınarak, (8)'de $i = k$ alınıp (29) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} R^{*i}_i &= K^* F^{*2} h^{*i}_i \\ &= (1-n)\, y^i\, \partial_i (p+P) + 2\partial_i (Qb^i) - y^j\, \partial_j (Q_i b^i) \\ &\quad + (n-1)(p+P)^2 + 2(n-1)Q(p+P)_r b^r \\ &\quad - Q_r Q_i b^r b^i + 2QQ_{ri} b^i b^r \end{aligned} \qquad (30)$$

bulunur. Diğer taraftan Teorem gereğince, $Q = 0$, $P = 0$ ve $h^{*i}_i = g^{ij} h_{ij} = n-1$ olduğundan (30)'dan

$$K^* = \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^4}(p^2 - y^i \partial_i p)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuçlar

Bu çalışmada herhangi iki Finsler uzayının metrikleri arasında tanımlanan bir Kropina dönüşümü altında, projektif düz bir Randers uzayının projektif düz bir Finsler uzayına dönüşmesini sağlayan koşul elde edilerek ispatlanmıştır. Bu dönüşümde projektif düz bir Randers uzayının projektif çarpanının ve sprey katsayılarının invaryant kaldığı görülmüştür. Daha sonra dönüşmüş uzayın skaler flag eğriliği elde edilmiştir.

Kaynaklar

Abate, M. ve Patrizio, G., (1994). Finsler metrics-A global approach, *Lecture Notes in mathematics, Springer-Verlag*, 1591.

Bao, D. ve Robles, C., (2004). Ricci and flag curvatures in Finsler geometry, *Riemann Finsler Geometry MSRI Publ.*, **50**, 197-26.

Hamel, G., (1903). Uber die geometrien, in denen die geraden die kürtzesten sind, *Mathematische Annalen*, **57**, 231-264.

Hashiguchi, M., Hojo, S. ve Matsumoto, M., (1996). Landsberg spaces of dimension two with (α, β)-metric, Tensor, N.S., **57**, 145-153.

Rapcs´ak, A., (1961). Über die bahntreuen Abbildungen metrisher R¨aume, *Publ. Math. Debrecen*, **8**, 285-290.

Senerath, P., Thornley, G. ve Brunt, B.V., (2007). A System of PDEs for riemannian spaces, *Journal of Australian Mathematical Society*, **82**, 249-262.

Shen, Z., (2002). Projectively flat Finsler metrics of constant flag curvature, *Transactions of the American Mathematical Society*, **355**, 1713-1728.

Shen, Z., (2001). Lectures on Finsler geometry, *World Scientific*, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

Shen, Z., (2001). Differential geometry of spray and Finsler spaces, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

Shen, Z., (2004). Landsberg, S-and Riemann curvatures, *Riemann-Finsler Geometry*, *MSRI Publ*, **50**, 303-351.

Singh, P., Prasad, N. ve Kumari, B., (2003). On a Kropina change of finsler metric, *Tensor Society*, **64**.

Szabo, L.Z., (1981). Positive definite Berwald spaces, *Tensor*, *N.S.*, **25**, 3.