

Yapısal dinamik analizlerin sonlu elemanlar cevaplarının süper elemanlar ve alt yapılara bölme ile iyileştirilmesi

Fikret Kamil ÇORBACI*, Ata MUĞAN

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada yapısal dinamik problemlerin analizlerinde sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen cevaplarının süper elemanlar ile iyileştirilmesi incelenmiştir. Geliştirilen yeni model derecesi düşürme (MDD) yaklaşımları ile olumlu sonuçlar elde edilmiştir. Bu yeni yaklaşımlar sistem zaman cevaplarının eşitliğini sağlayacak serbestlik derecelerinin aktif serbestlik dereceleri olarak MDD uygulanmış sistemin içine taşınması temeline dayanmaktadır. Hazırlanan Matlab kodları ile geliştirilen model derecesi düşürme yöntemi örnek yapılara uygulanmış ve alınan zaman cevabı sonuçları, orijinal modelin sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Tüm bu karşılaştırmalarda Rayleigh sönüm modeline uygun farklı katılık orantılı sönüm matrisi durumları dikkate alınmış ve farklı model dereceleri için hesaplama zamanları açısından sonuçlar değerlendirilmiştir. Ayrıca farklı MDD teknikleri ile elde edilen sistem toplam enerji miktarı orijinal modelin toplam enerjisi ile karşılaştırılmıştır. Çalışmada alt yapılara bölme (AYB)-“Substructuring” yöntemi de incelenmiştir. Geliştirilen Matlab kodu ile plak sistemleri üzerinde AYB uygulamaları yapılmış, sonuçlar orijinal model cevabı ile karşılaştırılmıştır. Oluşturulan süper elemanların kullanılması ile de hesaplama zamanları önemli ölçüde düşürülmüştür. Ancak süper eleman oluşturmaya harcanan zamanın yüksek olduğu ve AYB yönteminin geliştirilen MDD yönteminden daha kötü performans gösterdiği görülmüştür. Yapılan tüm karşılaştırmalar sonucunda çalışmada incelenen yöntemlerin çok düşük olan sönüm durumları dışında, orijinal model ile uyumlu zaman ve frekans cevapları verdiği, MDD uygulanmış sistemin orijinal model ile aynı enerji seviyelerinde bulunduğu ve karşılaştırılan diğer MDD yöntemlerinden çok daha az hesaplama zamanına ihtiyaç duyulduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: *Sonlu elemanlar yöntemi, model derecesi düşürme, alt yapılara bölme, süper eleman.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Fikret Kamil ÇORBACI. fikretkamil.corbaci@tei.com.tr; Tel: (222) 211 25 34.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Sonlu elemanlar yöntemleri ile yapısal dinamik analiz cevaplarının süper elemanlar ve alt yapılara bölme ile iyileştirilmesi" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 02.02.2009 tarihinde dergiye ulaşılmış, 12.03.2009 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.01.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Improvement of structural dynamic finite elements responses by using super elements and structuring

Extended abstract

In this study, the responses obtained by the Finite Element Analyses of structural dynamic problems are studied. With the developed model order reduction approach, some improvements have been gained. The developed model order reduction method is essentially based on the equality of the total energies of both original and reduced systems and therefore it is named as "Equality of the total energies". In the new approach, respecting the degrees of freedoms (DOF)s that give responses conforming with original system is assumed as the main criteria for selection of active DOFs. In this study, the main significant step is the selection of the active DOFs according to their influence to the system time response. The groups of active are application points of the external loadings and the DOFs having high stress or deflection values maximum because they are very important to reveal the right system response. For better accuracy, DOFs close to loading application points are also transferred into reduced system. Heuristic method had been also used for the selection of the active DOFs by some trials and errors to get better consistency between the original system response and reduced system response. Developed model order reduction method was applied to a sample 2D truss system and cantilever plate by some Matlab codes, and the results of the reduction analyses are compared with the original system responses in response to various loadings, eg. Impulse, step and sinusoidal inputs. In the same Matlab codes, time responses of some other model order reduction methods –Forward differences, Newmark integration and impulse response invariant (IRI)- are also implemented to the same original model. Various Rayleigh damping models for the sample system are taken into account in all these comparisons and the results of analyses for different model orders are evaluated in terms of calculation time and accuracy. Frequency domain responses of the original and the reduced systems by different approaches are also compared with each other based on Bode diagrams by considering the stiffness proportional damping. In parallel, the total energy levels of the reduced systems are also compared with the original system energy level. While auditing

of the system responses and Bode diagrams, it is noted that the compatibility of both the original and the reduced systems increases in parallel with the stiffness proportional damping value. In evaluation of the results, it could be expressed that the change in stiffness proportional damping value does not affect the calculation time. While comparing the total energies of original and reduced systems, it is observed that their consistency is good enough to state that both systems have the same system characteristic. Bode diagrams which reflect frequency response of a system, are assumed to be the main criteria to evaluate the performance of the reduced system for both high and low frequencies. It is concluded in general that when the number of an element type used in the analyses decreases, the amount of the DOFs which could be omitted from the original system increases and also the order of the reduced system decreases by keeping the same expected accuracy. As a result of observation, the limit of the model order reduction depends on the selected element type. Another conclusion is that general behavior of the damped or undamped systems do not affect the selected element numbers for the reduced system. In the study, substructuring method is also taken into considerations. By using Matlab codes, substructuring is implemented into a plate system and the results are compared with the original system. It is observed that the calculation time is extremely reduced by using super elements Nevertheless, since the time for calculation of super elements is long, it is seen that substructuring exhibits worse performance than developed model order reduction method.

After all comparisons, it is noted that the developed method gives compatible time and frequency responses with the original model except too low stiffness proportional dampings. It is also observed that the energy level of the reduced system obtained by this new model order reduction method is almost the same with the energy level of the original model. Finally, the most advantageous feature of equality of the total energies method was determined on the calculation time and it needs less calculation time than the other compared model order reduction methods during all examples carried out in the study.

Keywords: *Finite element method, model order reduction, substructuring, super element.*

Giriş

Dinamik olarak yüklenmiş yapısal sistemin frekans ve zaman uzaylarındaki cevaplarının belirlenmesi, mühendislik uygulamalarında sıklıkla çözümüne ihtiyaç duyulan problemlerdendir. Dinamik cevabın belirlenmesinde çeşitli analitik ve sayısal yöntemler bulunmasına rağmen en popüler yöntem, Sonlu Elemanlar yöntemi (SEY)'dir (Petyt, 1998). Özellikle otomobiller, uçaklar ve bunların parçaları gibi büyük ve karmaşık sistemlerin cevaplarının belirli bir doğruluk mertebesinde hesaplanabilmesi için SEY'de çok sayıda sonlu eleman kullanılarak model derecesinin artırılması gerekmektedir.

Tüm bu etkiler dikkate alındığında büyük modellerin dinamik problemlerin analizlerinde yüksek hesaplama kapasitesi ve hesaplama zamanına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle dinamik analizlerde problem boyutları azaltılarak hesaplamalara devam etme gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Günümüzde kullanılmakta olan temel yaklaşımlar şu şekilde sıralanabilir (Hughes, 1987; Cunedioğlu, 2005):

1. Simetri kullanımı ile hesaplamalarda azalma sağlanması,
2. Kapalı bir halka oluşturacak şekilde seçilmiş benzer elemanlardan oluşan dairesel periyodik –türbin veya kompresör paleli diskleri gibi- yapılar kullanılarak hesaplama zamanının kısaltılması,
3. Yapıya ait özdeğer denkleminin çözülmesinden önce uygulanacak farklı düzenlemeler ile yapıdaki birincil seviyede önem taşıyan serbestlik derecelerinin belirlenmesi ve bunların hesaplamalarda dikkate alınması ile hesaplamalardaki model derecesinin düşürülmesi,
4. Parça modu oluşturma yaklaşımı –CMS parça modu oluşturma yöntemi - ile Alt yapılara bölme (AYB) yöntemi ile veya blok oluşturulması sonucu yapıyı temsil edecek elemanın tanımlanması ve sadece bu eleman ile ilgili serbestlik derecelerinin hesaplamalarda kullanılması ile model derecesinin düşürülmesi.

Yapısal dinamik problemlerinde çözümün elde edilmesi ve bunun iyileştirilmesi, kullanılan MDD ve AYB yöntemlerine doğrudan bağlıdır.

Literatürde bulunan pek çok çalışma birbirinin devamı durumunda olup sistemin özelliklerine (serbestlik derecesi (SD), frekans aralığı v.b.) bağlı olarak değişik doğrulukta sonuç vermektedir (Maddox, 1975; Ma ve Hagiwara, 1991).

Gaz türbini gibi yüksek çalışma frekansına sahip yapısal sistemlerin dinamik analizinde elde edilen sonuçların doğruluğu kadar, ihtiyaç duyulan hesaplama kapasitesi ve hesaplama zamanının da optimize edilmesi, günümüz endüstriyel rekabet şartlarında kaçınılmaz bir gerekliliktir (Gu, 2000).

Çalışmada geliştirilen MDD ve AYB teknikleri, çubuk ve plak elemanlardan oluşturulan sistemler üzerinde uygulanmıştır. Hazırlanan Matlab kodu ile yeni yaklaşımların cevabının orijinal sistem cevabından farklılığı incelenmiştir.

Bu çalışmada Muğan (2003)'de belirtilen ayrık eşdeğerlik prensibi kullanılarak zaman uzayında elde edilen MDD ve AYB uygulanmış eşdeğer sistemlerin bulunması ve bunların cevaplarının incelenmesi amacıyla iki ayrı yaklaşım incelenmiştir (Çorbacı, 2009). Ayrıca değişik MDD yöntemleri, AYB amacıyla denenmiştir.

Kinetik ve potansiyel enerjilerin denkliği,

$$\text{Kinetik enerji : } \mathbf{H}_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_k \quad (1)$$

$$\text{Potansiyel enerji: } \mathbf{P}_k = \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{K} \mathbf{d}_k \quad (2)$$

$$\text{Toplam enerji: } \mathbf{T}_k = \mathbf{H}_k + \mathbf{P}_k \quad (3)$$

Özdeğer problemlerinin çözümü,

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{d} = \omega^2 \mathbf{d} \quad (4)$$

denkleminde elde edilir.

Toplam enerjilerin denkliği yaklaşımı

Impuls cevabı eşdeğerlik prensibi (Cunedioğlu, 2005) dikkate alınarak Kinetik ve Potansiyel enerjilerin toplamalarının eşitliği araştırılmıştır.

Sistemin toplam enerjisinin bulunmasında (1) ve (2) bağıntılarında verilen kinetik enerji ve potansiyel enerji ifadeleri kullanılarak, İleri farklar integrasyon yöntemi ifadeleriyle \mathbf{d}_k ve \mathbf{d}_{k+1} 'in fonksiyonu olarak yazılabilmektedir.

$$\dot{\mathbf{d}}_k \cong \frac{\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k}{\Delta t} \text{ bağıntısı kullanılarak (1)}$$

bağıntısındaki Kinetik Enerji ifadesi

$$\mathbf{H}_k = \frac{1}{2\Delta t^2} (\mathbf{d}_{k+1}^T - \mathbf{d}_k^T) \mathbf{M} (\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_k) \quad (5)$$

şeklinde yazılır ve (2) bağıntısı aynı şekilde kullanılırsa orijinal modelin toplam enerjisi,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k &= \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{K} \mathbf{d}_k + \\ &+ \frac{1}{2\Delta t^2} [\mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{M} \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{M} \mathbf{d}_k - \mathbf{d}_k^T \mathbf{M} \mathbf{d}_{k+1} + \mathbf{d}_k^T \mathbf{M} \mathbf{d}_k] \quad (6) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Matris şekline dönüştürülmüş hali ise,

$$\mathbf{T}_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_k^T & \mathbf{d}_{k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} & -\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \\ -\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} & \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{d}_{k+1} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

olarak yazılır. Model derecesi düşürülmüş sistemin toplam enerjisi benzer şekilde

$$\hat{\mathbf{T}}_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_k^T & \hat{\mathbf{d}}_{k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} + \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} & -\frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} \\ -\frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} & \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_k \\ \hat{\mathbf{d}}_{k+1} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir. (8) ifadesi düzenlenirse ve dönüşüm matrisi \mathbf{E} , orijinal model ve model derecesi düşürülmüş sistemlerinin yer değiştirme vektörleri yardımıyla aşağıdaki şekilde ele alınırsa,

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{E} \mathbf{d} \quad (9)$$

model derecesi düşürmek için dönüştürülmüş sistemin toplam enerjisi,

$$\hat{\mathbf{T}}_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_k^T & \hat{\mathbf{d}}_{k+1}^T \end{bmatrix} \mathbf{E}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} + \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} & -\frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} \\ -\frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} & \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} \end{bmatrix} \mathbf{E} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{d}_{k+1} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

şeklinde elde edilir. Burada belirtilen \mathbf{E} dönüşüm matrisi, düşürülmüş model derecesi kadar satır, orijinal model derecesi kadar sütundan oluşan ve sadece seçilen aktif SD'lerin orijinal modeldeki numaralarının olduğu sütunlarda 1'ler; diğer satır ve sütunlarda 0'lar içeren bir matristir.

Orijinal modelin ve MDD uygulanmış sistemin enerjileri $\mathbf{T}_k \equiv \hat{\mathbf{T}}_k$ olması isteneceği için katsayıların da eşit olması (enerji koruyan algoritma), gerekmektedir. Dolayısıyla,

$$\mathbf{E}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} + \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} & -\frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} \\ -\frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} & \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} \end{bmatrix} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} & -\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \\ -\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} & \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

olmalıdır.

$$\mathbf{E}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} \mathbf{E} = \mathbf{K} + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \quad (12a)$$

ve

$$\mathbf{E}^T \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\Delta t^2} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \quad (12b)$$

bağıntılarından MDD uygulanmış sistemin katılık matrisi

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{E} \mathbf{K} \mathbf{E}^T \quad (13)$$

ve kütle matrisi,

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{E} \mathbf{M} \mathbf{E}^T \quad (14)$$

şeklinde bulunur.

Özdeğer problemi çözümü yaklaşımı

Özdeğer problemlerinin çözümü ele alındığında model derecesi düşürülmüş sistem ile orijinal

model arasındaki bağıntıyı bulmak amacıyla $d = d_k(t)$ olmak üzere öncelikle her iki sistemin özdeğer ifadesi yazılacaktır. (4)'te belirtilen orijinal model,

$$Kd = M\omega^2 d \quad (15)$$

olarak yazılarak ve eşitliğin her iki tarafını E dönüşüm matrisi ile soldan çarpılarak yeniden düzenlenirse,

$$EKd = EM\omega^2 d \quad (16)$$

elde edilir. Benzer şekilde aşağıda belirtilen model derecesi düşürülmüş sistem,

$$\hat{K}\hat{d} = \hat{M}\omega^2 \hat{d} \quad (17)$$

ve (9) eşitliği kullanılarak yeniden düzenlenirse,

$$\hat{K}Ed = \hat{M}\omega^2 Ed \quad (18)$$

elde edilir. (16) ve (18) bağıntılarında, eşitliklerin her iki tarafındaki katsayıların eşitlikleri göz önüne alınarak, önce sol tarafların eşit olması incelenirse,

$$\hat{K}E = EK \quad (19)$$

bulunur.

$EE^T = I$ olduğu bilindiği için ifadenin her iki tarafı E^T ile sağdan çarpılırsa, model derecesi düşürülmüş sistemin katılık matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\hat{K} = EKE^T \quad (20)$$

Model derecesi düşürülmüş sistemin kütle matrisi ise benzer işlemler tekrar edilerek

$$\hat{M} = EME^T \quad (21)$$

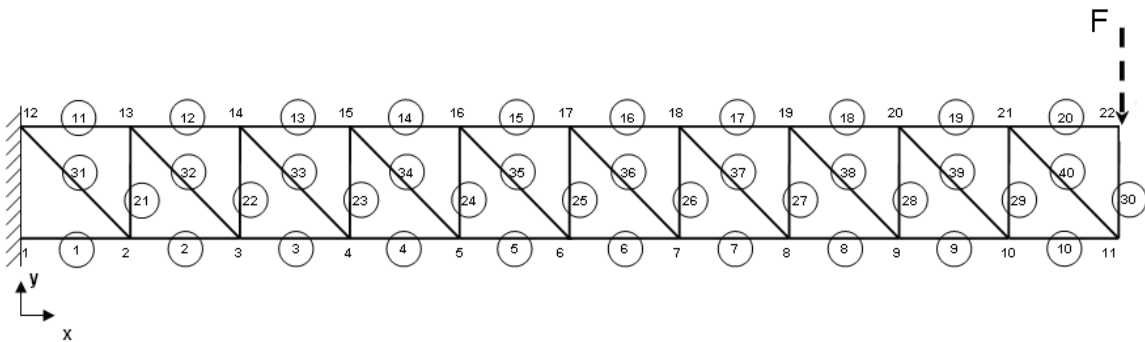
şeklinde bulunur. Görüldüğü gibi, bulunan sonuç (13) ve (14) eşitliklerindeki ile aynıdır. Özetle, enerji koruyan bir algoritma, seçilen aktif SD'lerde aynı modlara sahip olmalıdır.

AYB uygulamalarında kullanılan diğer MDD tekniklerinin dönüşüm matrisleri (Cunedioğlu, 2005)'de bulunabilir.

Model derecesi düşürme uygulaması

Geliştirilen yeni MDD tekniklerinin yapılacak analize uygun olan eleman tipi için yeterli sonuçları vermesi hedeflendiği için temel eleman tipleri üzerinde ve nispeten hesaplama ile karşılaştırılabilecek sistemler üzerinde uygulamaları yapılarak sonuçlar değerlendirilmiştir. Yeni tekniklerin uygulanması için Şekil 1'de verilmekte olan düzlemsel çubuk eleman sistemi örnek olarak seçilmiştir. Bu seçimde düzlemsel çubuk eleman sisteminin analitik kesin çözümü bilinmesi önemli rol oynamıştır. Sistemin farklı model dereceleri için analiz sonuçları, eleman sayıları aynı tutularak değerlendirilmiştir.

Toplam enerjilerin denkliği ve özdeğer problemi çözümü yaklaşımlarından bulunan (13), (20) ve (14), (21) nolu bağıntılar, MATLAB'de hazırlanan bir program içerisinde Şekil 1'de verilmekte olan düzlemsel çubuk sistemin dinamik analizinde uygulanmıştır.



Şekil 1. 40 elemanlı düzlemsel çubuk sistem

Sistemin özellikleri ve tanımlar

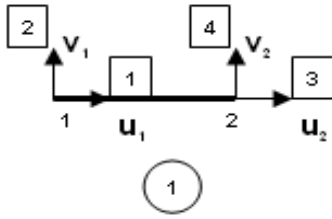
Uygulamada yapının sönümlü ve sönümsüz davranışları farklı yükleme tiplerine göre incelenmiş ve farklı MDD teknikleri uygulanmış sistem cevaplarının ve bu hesaplamalarda kullanıldığı işlem zamanları karşılaştırılmıştır.

Analizi yapılan sistem 40 adet çubuktan oluşmakta olup bunlardan 30 adedinin uzunluğu

$l_1 = 1 \text{ m}$, 10 adedinin uzunluğu ise $l_2 = 1.41 \text{ m}$ 'dir. Kesit alanları $A = 0.0025 \text{ m}^2$ olan çubukların birleşimleri, 22 düğüm noktasında gerçekleşmektedir.

Çubukların malzemesi olarak yoğunluğu $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ olan çelik seçilmiş olup, elastiklik modülü $E = 210 \text{ GPa}$ alınmıştır.

Şekil 1'de verilen kafes sistemde kullanılan elemanların düğüm noktası tanımları ve serbestlik derecelerinin numaralandırılması Şekil 2'de verilmektedir.



Şekil 2. Çubuk elemanın düğüm noktası ve serbestlik derecesi numaralandırması

Öncelikle sisteme ait topoloji matrisi oluşturularak, elemanlar ile düğüm noktaları ve serbestlik dereceleri arasındaki ilişki tanımlanmıştır. Bu ilişki kullanılarak K_C eleman katılık ve M_C eleman kütle matrislerinin montaj işlemi yapılmış ve K sistem katılık matrisi ile M sistem kütle matrisi elde edilmiştir. 1 ve 12 nolu düğüm noktalarından ankastre olarak sabitlenmiş olan sistemin sınır şartları uygulanarak orijinal modelin düzenlenmiş K_2 ve M_2 sistem matrisleri elde edilmiştir. Rayleigh yaklaşımı ile sistemin sönüm matrisi $C_2 = \beta K_2$ bağıntısı ile $\beta = 0.001$ için oluşturulmuştur. Çubuk sistemin sınır şartları uygulandıktan sonra kuvvet yük-

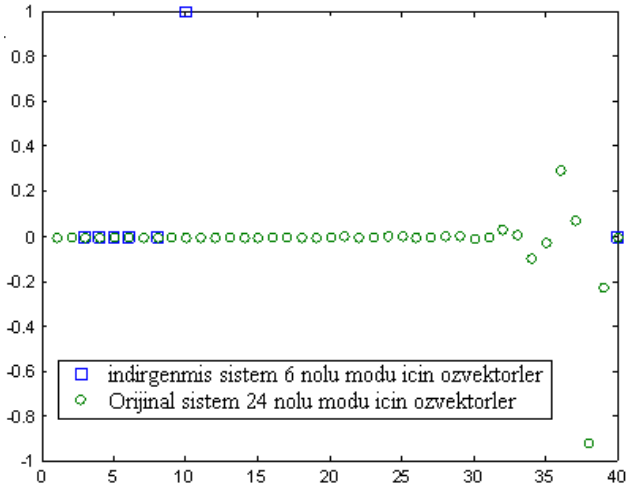
mesinin uygulandığı serbestlik derecesi 40'dır. Yükleme, 30 numaralı elemanın üst uçlarında yer alan 22 nolu düğüm noktasına $F = -100 \text{ N}$ kuvveti uygulanmaktadır. Buna göre kuvvet matrisi F_2 düzenlenmektedir.

Dönüşüm matrisinin oluşturulması ve kullanılması

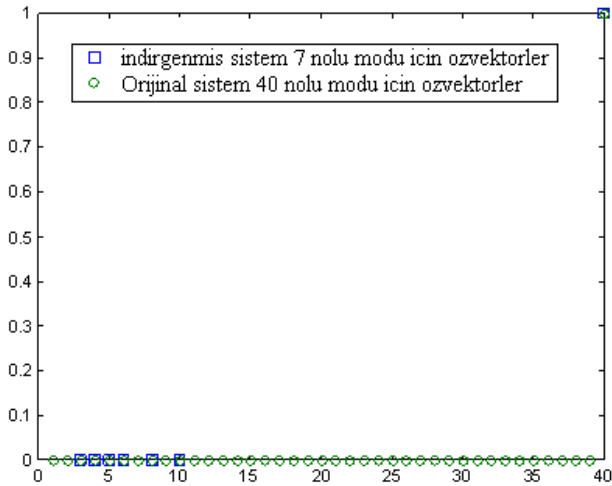
Ardından (9) bağıntısında belirtilen E dönüşüm matrisi kullanılarak, MDD uygulanmış sistemi elde edilmektedir. E dönüşüm matrisinin oluşturulması için öncelikle MDD uygulanmış sisteme dahil edilecek serbestlik dereceleri belirlenmelidir. E dönüşüm matrisini oluşturacak aktif serbestlik derecelerinin seçimine uygun bir yaklaşım getirilmesi, alınan sonuçlardaki yaklaşıklığın artmasını sağlayacağı bilinmektedir. Öncelikle yüklemelerin yapıldığı düğüm noktaları, yükleme yapılan bölgeye yakın düğüm noktaları, deneme-yanılma yolu (heuristic) ve son olarak özdeğerlerin karşılaştırılması gibi değişik seçenekler bulunmaktadır. MDD uygulanmış sistemin içine dahil edilen serbestlik derecelerinin orijinal sistem ile indirgenmiş sistemin özdeğerlerin uyumuna etkisi çalışmada ayrıca incelenmiştir. Elde edilen E dönüşüm matrisi, (13) ve (14) bağıntılarında uygulanarak model derecesi düşürülmüş sistemin \hat{K} , \hat{M} ve \hat{C} matrisleri oluşturulmuştur. Orijinal modelin ve model derecesi düşürülmüş sistemin katılık, kütle ve sönüm matrisleri kullanılarak her iki sistemin özdeğerleri ve özvektörleri hesaplanmıştır.

Özdeğerlerin karşılaştırılması ve MDD seçim kriteri olarak kullanılması

Bu yeni yaklaşımda MDD uygulanacak serbestlik derecelerinin seçiminde modal analiz sonucunda bulunan özdeğerlerin çakışması ölçütünün kullanılması hedeflenmiştir. Her bir SD için elde edilen özdeğerlerin sonuçları birbirleri ile karşılaştırılarak uyumlu olanları tespit edilmektedir. Ardından uyumlu olduğu görülen serbestlik dereceleri için sistem cevaplarını veren özvektörleri, grafik üzerinde incelenerek aynı sonuçları oluşturan yer değiştirmeler Şekil 3 ve Şekil 4'te verildiği gibi elde edilmektedir.



Şekil 3. Model derecesi 7 için orijinal model 24. özdeğerine göre bulunan özvektörleri (daire) ile MDD uygulanmış sistemin 6. özdeğerine ait özvektörlerinin (kare) karşılaştırılması



Şekil 4. Model derecesi 7 için orijinal model 40. özdeğerine göre bulunan özvektörleri (daire) ile MDD uygulanmış sistemin 7. özdeğerine ait özvektörlerinin (kare) karşılaştırılması

Orijinal model ve model derecesi düşürülmüş sistemden alınan cevaplar karşılaştırıldığında özdeğerleri uyumlu olan modlardaki tüm SD'lerdeki sistem cevaplarının ise bir kısmının uyumlu bir kısmının uyumsuz olduğu gözlenmektedir. Şekil 3 ve 4'te orijinal model derecesi 40 olan bir sistemin ve model derecesi 7 olarak seçilmiş indirgenmiş hali için yapılan modal analizden örnekler sunulmaktadır. Bu örnekte önce orijinal modelin bulunan özdeğer sonuçları ile indirgenmiş sistemin özdeğer sonuçları karşı-

laştırılmıştır. Bu karşılaştırmada örneğin, 40 SD'li orijinal modelin 24 nolu özdeğerinin, indirgenmiş sistemin 6 ve 40 nolu orijinal model modunun da indirgenmiş sistemde 7 nolu moda yakın olduğu tespit edilmiştir. Ardından orijinal model ve indirgenmiş sistem için bu özdeğer sonuçları incelenmiş ve Şekil 3 ve 4'de görüldüğü şekilde özdeğer sonuçları birbirine yakın olan bu sistem modlarında özvektör sonuçlarının da aynı olduğu tespit edilmiştir. Ancak yapılan diğer analizlerde bu kritere uyulmadan seçilen SD'leri içeren indirgenmiş sistemlerin de orijinal modellerle çok uyumlu sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu nedenle, indirgenmiş sistem SD seçimleri, model derecesinin daha fazla düşürülmesine imkan sağlaması şartı ile denemeyanılma yaklaşımı ile gerçekleştirilmiştir.

Model derecesi düşürülmüş sistemlerin cevaplarının karşılaştırılması

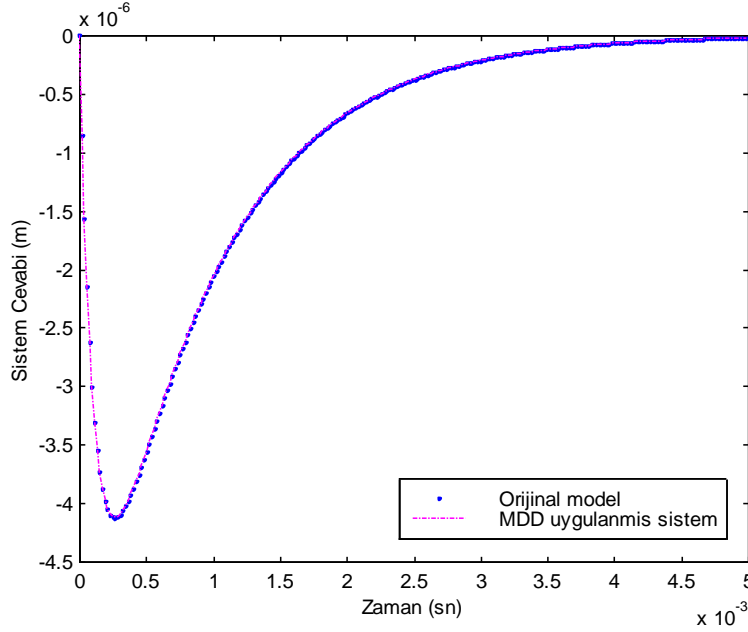
Çalışmanın devam eden aşamasında uygulanan impuls, basamak ve sinüs girişlerine karşılık orijinal model ve Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, İleri farklar yöntemi, Newmark yöntemi ve IRI yöntemleri (Cunedioğlu, 2005) ile model derecesi düşürülmüş sistemlerden alınan cevapların zaman uzayında ayrı ayrı karşılaştırılmaları yapılmıştır. Analizlerde eleman sayısı sabit 40 olarak alınmıştır. Buna paralel olarak kullanılan hesaplama zamanları, Toplam enerjilerin denkliği yöntemi, İleri farklar yöntemi, Newmark yöntemi ve IRI yöntemi kullanımında $\beta=0.001$ sönüm durumu için Tablo 1'de verilmiştir. Aynı sönüm durumu için sistemin verdiği impuls cevabı, Şekil 5'te görülebilir.

Eleman sayısı aynı tutularak yapılan analizlerde sönümün hesaplama zamanı üzerinde önemli bir etkisinin olmadığı görülmüş ve yöntemler arasında ciddi bir hesaplama süresi farkına rastlanmamıştır. Diğer taraftan, IRI yönteminin diğer yöntemlere göre daha fazla hesaplama zamanı kullandığı bu durumun eleman sayısındaki artış ile bir dezavantaja dönüşeceği değerlendirilmektedir.

Sistem cevaplarının değerlendirilmesinde genel olarak tüm MDD yöntemlerinin yakın sonuçlar verdiği, sönüm artıkça orijinal model ile MDD

Tablo 1. 40 elemanlı düzlemsel çubuk sistem analizi için hesaplama zamanları karşılaştırmaları

Model derecesi	Sönüm katsayısı	Energilerin denklığı yöntemi	İleri farklar yöntemi	Newmark yöntemi	IRI yöntemi	MDD'siz
	(β)	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]
40'den 5'e	0.001	0.016	0.016	0.016	0.031	0.062
40'den 12'ye	0.001	0.015	0.015	0.016	0.047	0.047
100'den 12'ye	0.001	0.015	0.031	0.015	0.389	0.284
1000'den 20'ye	0.001	0.155	3.561	0.748	709.5160	308.391

Şekil 5. Sönümlü ($\beta=0.001$) halde 40 elemanlı düzlemsel çubuk sisteminin orijinal model ve Toplam enerjilerin denklığı Enerji yöntemi ile model derecesi 5'e indirgenmiş sistem için impuls cevapları

uygulanmış sistemlerin cevaplarının uyum düzeyinin arttığı görülmüştür. Sönüm azalmasının en çok IRI yöntemi üzerinde etkili olduğu ve IRI ile oluşturulan indirgenmiş sistem cevabının sönümsüz ve az sönümlü analizlerde önemli sapmalar içerdiği gözlenmiştir. Ayrıca sönümsüz analizlerde tüm MDD tekniklerinin yeterli hassasiyette cevap vermediği gözlemlendiği için, az sönümlü $\beta=0.00008$ değeri sönümsüz durumu temsil etmesi için seçilmiştir.

Zaman uzayında alınan sonuçlar ile frekans cevabı ve modal çözümler arasında bir paralellik olduğu, öncelikle orijinal model ve indirgenmiş sistem için yapılacak modal analizin değerlendirilmesi ile sistem cevapları hakkında önemli bilgi elde edilmiş olacağı görülmüştür.

Alt yapılara bölme yaklaşımı

Karmaşık dinamik analizlerde yapının karmaşıklığı ve büyüklüğü ile analizi etkileyecek detayların fazla oluşu, büyük boyuttaki kütle, katılık ve (varsa) sönüm matrisleri ile hesaplama yapılmasını zorunlu kılmaktadır. Bu tip yapıların uygun özelliklerde bölünmüş "süper eleman" olarak adlandırılan alt parçalarının bir araya getirilmesi ile gerçekleştirilen analizlerle sonuç alınması Tekniği olan "Alt yapılara bölme" yaklaşımı analizcilerin en çok tercih ettiği yöntemlerdendir. Çalışmada incelenen çeşitli MDD yöntemlerinin performanslarının değerlendirilmesi amacıyla AYB yöntemi de uygulanmıştır.

Süper eleman oluşturulacak yapının üzerinde öncelikle diğer elemanlar ile temasta olacak dış

düğüm noktaları ve dolayısıyla ilişkili süper eleman oluşturulması sonrasında varlığını sürdürecektir serbestlikler belirlenir. Süper eleman oluşturulması sonrasında elemanın içinde kalacak düğüm noktaları, genel olarak yoğunlaştırılan serbestlikler olarak anılmaktadır. Oluşturma fazı sonrasında süper eleman kullanımlarında dış temas düğüm noktaları, analiz modelinde diğer elemanların bağlanmasında kullanılmaktadır.

İç kısımda yer alan yoğunlaştırılmış düğüm noktaları ile ilişkili olan tüm serbestlik derecelerinden arındırılmış bir analiz modeli elde etmek için yoğunlaştırma uygulanmaktadır. Karmaşık olmayan statik yapılar için Gauss eliminasyon yöntemi yeterli olurken, karmaşık statik yapılar için statik açık matris yoğunlaştırması ve dinamik yapılar için de kütle etkilerinin dikkate alındığı dinamik matris yoğunlaştırması kullanılması gerekmektedir. Yoğunlaştırma öncesinde yapının dinamik davranış denklemi,

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F \quad (22)$$

şeklinde ve yoğunlaştırma sonrası dinamik davranış denklemi ise

$$\hat{M}\ddot{\hat{u}} + \hat{C}\dot{\hat{u}} + \hat{K}\hat{u} = \hat{F} \quad (23)$$

şeklinde yazılabilir. “a” indisleri aktif ve “o” indisleri ise iç kısımlarda yer alan ihmal edilen SD'lere ait terimleri göstermek üzere, kuvvet vektörü ifadesi,

$$\hat{f}_a = f_a - K_{ao}K_{oo}^{-1}f_o \quad (24)$$

katılık ve kütle matrisleri ifadeleri de

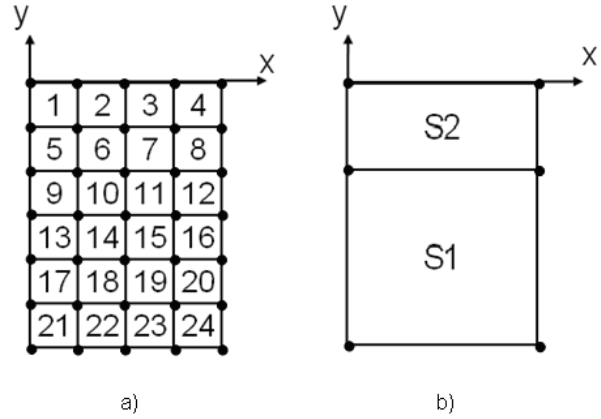
$$\hat{K}_{aa} = K_{aa} - K_{ao}K_{oo}^{-1}K_{oa} \quad (25)$$

$$\hat{M} = M_{aa} - K_{ao}K_{oo}^{-1}M_{oa} - M_{ao}K_{oo}^{-1}K_{oa} + K_{ao}K_{oo}^{-1}M_{oo}K_{oo}^{-1}K_{oa} \quad (26)$$

şekline dönüştürülür.

Plak'da süper eleman uygulamaları

AYB yöntemi ile süper eleman oluşturulmasına örnek uygulama olarak Şekil 6'da verilen plak seçilmiştir. Seçilen düzlemsel plak orijinal modeli, 24 eleman ve 35 düğüm noktasından oluşmaktadır. Düzlemsel plak elemanın her bir düğüm noktasında 1 öteleme ve 2 dönme olmak üzere 3 serbestlik derecesi bulunmaktadır.



Şekil 6. AYB uygulanacak sistemler

a) 24 elemanlı plak sistemi, b) Süper elemanlardan oluşturulan indirgenmiş sistem

Seçilen ankastre bağlı plağın x yönündeki genişliği 120 mm, y yönündeki yüksekliği 240 mm olup, plak kalınlığı 2.4 mm'dir. Plak malzemesi olarak yoğunluğu 7850 kg/m³, elastiklik modülü 210 GPa, kayma modülü 75 GPa ve Poisson oranı 0.3 olan çelik seçilmiştir. Yükleme 15 nolu elemanın sol alt köşesindeki düğüm noktasından ve z yönünde sayfa düzleminden içeri doğru -100 N olarak uygulanmıştır.

Hazırlanan Matlab programında öncelikle orijinal modelin topoloji matrisi, indirgenmiş sistemin topoloji matrisine dönüştürülmektedir. Ardından indirgenmiş sistemin katılık ve kütle matrisleri bulunmaktadır. Bulunan bu matrisler orijinal yapısal sistemin süper eleman haricindeki elemanlarının katılık ve kütle matrisleri ile montajı yapılmıştır. Sınır şartları ile impuls ve sinüs yüklemelerin uygulanması sonrasında sistem cevapları bulunmuştur. Bulunan sistem cevapları aynı yüklemelerin yapıldığı orijinal model cevapları ile karşılaştırılmıştır. Seçilen örnek malzemelerin Tablo 2'de verilen katılık orantılı sönüm katsayıları ($\beta=0.00008, 0.001, 0.01, 0.1$)

Tablo 2. 24 elemanlı plak sisteminde AYB kullanarak ve AYB kullanmadan yapılan analizlerin hesaplama zamanları karşılaştırması

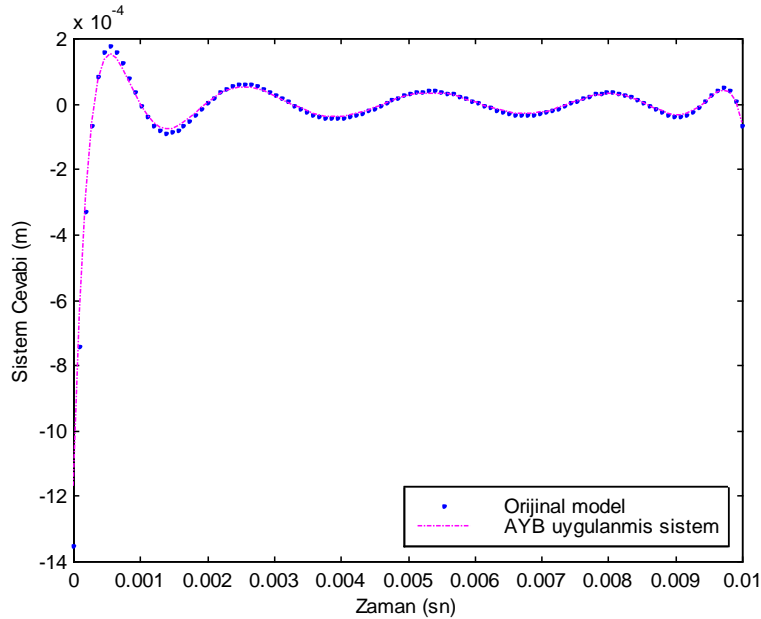
Eleman sayısı	Orijinal model derecesi ve AYB sonrası model derecesi	Süper elemanın içerdiği eleman sayısı	Rayleigh katılık orantılı sönüm katsayısı	AYB oluşturma işlemci zamanı	AYB kullanımı işlemci zamanı	AYB'siz işlemci zamanı	AYB'siz işlemci zamanı
				[saniye]	[saniye]	[saniye]	[saniye]
24	105'den 12'e	16 ve 8	0.00008	3.781	4.578	0.015	0.125
			0.001	4.422	5.516	0.015	0.188
			0.01	3.797	4.594	0.016	0.125
			0.1	3.938	4.766	0.016	0.125

için analizler gerçekleştirilmiştir. Tablo 2'den görüldüğü gibi plak sistemi için AYB ile oluşturulmuş süper elemanların kullanımı hesaplama süresini yaklaşık %99 mertebesinde azaltmaktadır. AYB sonuçlarına örnek olması amacıyla impuls giriş uygulanan AYB ile indirgenmiş sistemin cevaplarının orijinal model cevapları ile uyumlu oldukları görülmüştür (Şekil 7). AYB uygulaması sonrasında elde edilen tüm indirgenmiş sistem cevapları ve orijinal model cevapları dikkate alındığında sönüm değerindeki

artışın sistem cevaplarındaki uyuma olumlu etkisi olduğu sonucuna varılmaktadır.

Sonuçlar

Yapısal dinamik analiz problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen cevaplarının yüksek frekanslarda başta olmak üzere iyileştirilmesi amacıyla geliştirilen model derecesi düşürme tekniğinin sonuçları yapılan örnek analizlerde orijinal modele göre kıyaslanmış ve sonuçların model derecesine bağlı olmadan olumlu

Şekil 7. $\beta=0.001$ için 24 elemanlı plağa uygulanan AYB ile bulunan sistem ile orijinal modelin impuls cevaplarının karşılaştırılması

neticeler verdiği tespit edilmiştir. Hazırlanan Matlab kodları ile geliştirilen model derecesi düşürme yöntemi bir düzlemsel çubuk yapı ve plak üzerinde uygulanmış ve alınan sonuçlar, orijinal modeller ile karşılaştırılmıştır. Yine aynı kod içinde yer alan diğer model derecesi düşürme yöntemlerine –İleri farklar, Newmark integrasyonu ve İmpuls cevabı invaryantı- göre elde edilen sistem cevapları orijinal model cevabı ile karşılaştırılmıştır. Tüm bu karşılaştırmalarda sönüm durumları dikkate alınmış ve farklı model dereceleri için hesaplama zamanları açısından sonuçlar değerlendirilmiştir. Sistem cevaplarının değerlendirilmesinde genel olarak tüm MDD ve AYB yöntemlerinin yakın sonuçlar verdiği, sönüm arttıkça orijinal model ile MDD ve AYB uygulanmış sistemlerin cevaplarının uyum düzeyinin arttığı görülmüştür. Sönümsüz analizlerde tüm MDD ve AYB tekniklerinin yeterli hassasiyette cevap vermediği gözlemlendiği için az sönümlü durumu temsil eden $c=0.00008$ değeri sönümsüz durumu temsil etmesi için seçilmiştir. Harcanan hesaplama zamanları, Toplam enerjilerin denklığı yöntemi, İleri farklar yöntemi, Newmark yöntemi ve İmpuls cevabı invaryantı yöntemi ile model derecesi düşürülmesi durumunda sönümlü ve sönümsüz halleri dikkate alındığında, eleman sayısının aynı tutulduğunda sönümün hesaplama zamanında önemli bir etkisi olmadığı görülmüştür. Ayrıca model derecesindeki artışın çözüm zamanına etkisinin çok olmadığı sonucuna varılmıştır. Hesaplama süresi açısından yöntemler arasında önemli bir farklılık olmadığı gözlemlenmiştir. Ancak IRI yönteminin diğer yöntemlere göre daha fazla hesaplama zamanı kullandığı bu durumun eleman sayısındaki artış ile bir dezavantaja dönüşeceği değerlendirilmektedir. Çalışmada Toplam enerjilerin denklığı yöntemi, İleri farklar Yöntemi, Newmark yöntemi ve son olarak IRI yöntemi ile model derecesi düşürme uygulanmış sistemin orijinal model ve model derecesi düşürülmesi ile elde edilen sistemlerin enerji seviyelerinin karşılaştırmaları yapılarak eşdeğer sistemin uyumu da ayrıca kontrol edilmiştir. Yapılan hesaplamalarda doğrulama amacıyla da kullanılması düşünülen bu karşılaştırmalar, sönümlü sistemler için tam uyum halinde cevaplar vermektedir. Sönüm azaldıkça uyum seviyesinde

azalma görülmektedir. Sönüm azalmasının en çok IRI yöntemi üzerinde etkili olduğu ve IRI ile oluşturulan indirgenmiş sistem cevabının sönümsüz ve az sönümlü analizlerde önemli saplamalar içerdiği gözlenmiştir.

Zaman uzayında alınan sonuçlar ile frekans cevapları ve modal çözümler arasında bir paralellik olduğu, öncelikle orijinal model ve indirgenmiş sistem için yapılacak modal analizin değerlendirilmesi ile sistem cevapları hakkında önemli bilgi elde edilmiş olacağı görülmüştür.

Orijinal model ile farklı yöntemlere göre model derecesi düşürülmüş sistemlerin frekans cevaplarının Bode diyagramları üzerinde karşılaştırmaları sönüm durumu dikkate alınarak değerlendirilmiştir. Burada model derecesi düşürme sonrasında elde edilen sönümlü sistemlerin hem düşük ve hem de yüksek frekanslarda orijinal model ile aynı frekans cevabını verdiği görülmektedir. Bu durumda sistemin model derecesi düşürme sonrasında sistem karakterinin değişmediği sonucuna varılmaktadır. Sönümsüz sistemlerde alınan cevapların karşılaştırılmasında yerel olarak uyumsuzluk gözlemlense de benzer karakterde frekans cevapları alındığı kabul edilebilir. Ayrıca farklı model derecesi düşürme teknikleri ile elde edilen sistem toplam enerji miktarı orijinal modelin toplam enerjisi ile karşılaştırılmış, kuvvet uygulanan noktaların aktif serbestlik derecesi olarak seçilip indirgenmiş sisteme dahil edilmesi durumunda hem sönümlü ve hem de sönümsüz sistemlerde enerji seviyelerinin aynı değerlerde hesaplandığı sonucuna varılmıştır.

Çalışma içerisine dahil edilen AYB yöntemi ile yapılan karşılaştırmalarda dikkat çeken ilk husus, plak sistemi için AYB ile oluşturulmuş süper eleman kullanımının hesaplama süresini yaklaşık %99 mertebesinde azaltmasıdır. Ancak, süper eleman oluşturmak için harcanan zamanın herhangi bir MDD uygulanmamış yapının analizinden daha uzun olması nedeniyle, AYB uygulamalarında eleman seçimlerinin tekrarlanacak analiz iterasyonlarında düzeltme yapılmadan kullanımını sağlayacak şekilde seçilmesi gerekmektedir. Sonuç olarak, oluşturulan

süper elemanların kullanılması ile de hesaplama zamanları önemli ölçüde düşürülmüş olmasına rağmen, süper eleman oluşturmaya harcanan zamanın yüksek olması nedeniyle AYB yönteminin de geliştirilen MDD yönteminden daha kötü performans gösterdiği görülmüştür.

Kısaltmalar

SEY	: Sonlu Elemanlar Yöntemi
SD	: Serbestlik Derecesi
MDD	: Model Derecesi Düşürme
MOR	: Model Order Reduction
IRI	: Impuls Response Invariant
CMS	: Parça modu oluşturma yaklaşımı
ANSYS	: SEY paket programı
AYB	: Alt Yapılara Bölme

Kaynaklar

Çorbacı, F.K., (2009). Sonlu elemanlar yöntemleri ile yapısal dinamik analiz cevaplarının süper elemanlar ve alt yapılara bölme ile iyileştirilmesi, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

- Cunedioğlu, Y., (2005). Yapıların dinamik indirgenmiş modellerinin ve süper eleman tekniklerinin frekans ve zaman uzaylarında analizi, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Gu, J., (2000). Efficient model reduction methods for structural dynamics analyses, *PhD Thesis*, Michigan University, USA.
- Haug, E.J., Choi, K.K. ve Komkov, V., (1986). *Design sensitivity analysis of structural systems*, Academic Press Inc., Orlando, Florida, USA.
- Hughes, T.J.R., (1987). *The finite element method*, Printice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- Ma, Z.D. ve Hagiwara, I., (1991). Improved mode-superposition technique for modal frequency response analysis of coupled *acoustic-structural systems*, *AIAA Journal*, **29**, 1720-1726.
- Maddox, N.R., (1975). On the number of modes necessary for accurate response and resulting forces in dynamic analysis, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **42**, 516-517.
- Muğan, A., (2003). Discrete equivalent time integration methods, for transient analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **57**, 2043-2075.
- Petyt, M., (1998). *Introduction to finite element vibration analysis*, Cambridge University Press, UK.