

Dielektrik silindir içerisine gömülü keyfi şekilli bir empedans silindirine ilişkin ters saçılma problemi

Fatih YAMAN*, Ali YAPAR, Rainer KRESS

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Telekomünikasyon Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Ters saçılma teorisinde yanına yaklaşılamayan cisimlerin fiziksel özelliklerinin belirlenmesi önemli bir araştırma konusu olarak bilinmektedir. Bu çalışmada, iki boyutta keyfi bir şekle sahip dielektrik silindir içerisine gömülü keyfi şekilli bir cismin üzerinde tanımlanan inhomojen empedans fonksiyonunun saçılan elektromagnetik alan verisinden yararlanılarak bulunması için sınır integral denklemlerin çözümüne dayanan bir metod önerilmiştir. İntegral denklemler bir potansiyel yaklaşımı altında türetilmiştir. Bu bağlamda saçılan ve toplam alanlar, içerisinde kaynak (yoğunluk) ve Hankel fonksiyonları içeren integral gösterilimler şeklinde tek-katman potansiyelleri ve bunların kombinasyonları kullanılarak ifade edilmiştir. Fiziksel olarak tek-katman potansiyelleri üzerinde monopollerin bulunduğu bir katmana karşı gelmekle beraber homojen Helmholtz dalga denklemini ve Sommerfeld radyasyon koşulunu sağlar. Problemin çözümünde dielektrik silindirin içerisindeki ve dışarısındaki aynı türden magnetik özellik gösteren basit ortamlara ait dalga sayılarının, silindirlerin şekillerinin ve yakın/uzak saçılan alan verisinin bilindiği varsayılmıştır. Empedans fonksiyonunun bulunabilmesi için her bir bölgedeki elektromagnetik alanların hesabına yönelik yeni bir algoritma sunulmuştur. Saçılan alandan saçıcıların üzerinde tanımlı yoğunluk fonksiyonlarının kararlı ve yaklaşık çözümlerini elde edebilmek amacıyla kötü-kurulmuş integral denklemler Tikhonov anlamında değerlendirilmiştir. Yoğunluk fonksiyonlarının bulunması, dielektrik silindir içerisindeki toplam alanı hesaplanabilir kılmuş ve uygun sıçrama koşulları altında empedans fonksiyonu empedans sınır koşulundan en küçük kareler yöntemi ile elde edilmiştir. Önerilen metodun uygulanabilirliği ve etkinliği nümerik deneylerle test edilmiş ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ters saçılma, empedans sınır koşulu, sınır integral denklemleri.

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Fatih YAMAN yamanf@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 36 35.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Telekomünikasyon Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Inverse scattering problems for the objects buried in penetrable cylinders" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 05.11.2009 tarihinde dergiye ulaşmış, 02.12.2009 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.06.2011 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Bu makaleye "Yaman, F., Yapar, A., Kress, R., (2011) 'Dielektrik silindir içerisine gömülü keyfi şekilli bir empedans silindirine ilişkin ters saçılma problemi', İTÜ Dergisi/D Mühendislik, 10: 1, 143-152" şeklinde atıf yapabilirsiniz.

An inverse problem related to an arbitrarily shaped impedance cylinder buried in a dielectric cylinder

Extended abstract

Main research areas of inverse scattering theory is the reconstructions of geometrical (location and shape) and / or physical (dielectric permittivity, conductivity, impedance etc.) properties of inaccessible obstacles from the knowledge of the scattered waves (electromagnetic, acoustic, elastic etc.) at large distance. Radar / sonar applications, medical tomography, geophysical exploration and non-destructive testing lead to this type of problems. Motivated by the applications researchers proposed different types of solution methods for the mentioned problems especially after the II. World War.

Impedance boundary condition is used to simplify scattering problems involving complex structures. Such that in electromagnetics, imperfectly conducting scatterers, perfectly conducting objects with a penetrable or absorbing boundary layer can be modeled by an impedance boundary condition. In this context, one can study with a simpler model for complex typed structures. The aim of the direct scattering problem for an impedance cylinder is to obtain scattered near- or far-field data for given shape of the cylinder, the impedance function and the wave number of the background medium in the case of an electromagnetic wave illumination. However in the inverse problem case one recovers the impedance function defined on the cylinder from the knowledge of scattered field, shape of cylinder and wave number of the host medium.

In this study, we considered an inverse scattering problem for arbitrarily shaped cylindrical objects that have inhomogeneous impedance boundaries and are buried in arbitrarily shaped cylindrical dielectrics. This consideration is realistic, since the problem will have many possible practical applications. For example, in the non-destructive testing of a coating on a wire; the coating is characterized by an inhomogeneous lossy cylindrical layer and the conducting wire is modeled by an inhomogeneous surface impedance, or in biomedical applications; the bone of the arm can be modeled in terms of an impedance boundary condition while the muscular structure over it, can be considered as an inhomogeneous lossy cylindrical layer.

For the sake of brevity we assume cylinders are infinitely long and illuminated by a TM polarized elec-

tromagnetic wave whose electric field vector is always parallel to x_3 -axis. Due to the symmetry and homogeneity along the x_3 -axis the total electric field vector will be polarized both inside and outside of the cylinder parallel to the x_3 -axis. Then the problem is reduced to a scalar one in terms of total fields that have to satisfy homogeneous Helmholtz equation. In order to determine inhomogeneous impedance function we have to reconstruct the field occurring in the interior domain of the dielectric cylinder. Therefore since layer potentials are the solutions of homogeneous Helmholtz equation and they satisfy Sommerfeld radiation condition we use a potential approach to represent fields in every domain via single-layer potentials. Then the far-field expression can be obtained from the asymptotic representation of the scattered field. We note that one can use these representations under proper assumptions for the wave numbers. Roughly speaking, layer potentials are the integrals defined over the boundary of the scatterers which contain Hankel and density (source) functions. In our problem we define two density functions on the boundary of the exterior cylinder and one density function on the buried obstacle. Afterwards, one of the densities on the exterior cylinder can be reconstructed from the solution of an ill-posed far-field equation with measured far field pattern as a data via Tikhonov regularization. The rest two unknown densities are found from the integral equation system obtained by using dielectric (transmission) conditions which ensure the continuity of the fields and their normal derivatives across the boundary of the exterior cylinder. However the compactness of the operators in the system expresses its ill-posedness. Therefore to obtain a stable solution of the system for the densities we apply Tikhonov regularization. Now one can read off the values of the impedance function by substituting interior total field values to the standard impedance boundary condition using jump relations. However, the reconstruction of the impedance function will be sensitive to errors. In order to obtain stable reconstructions we express the unknown impedance function in terms of basis functions and apply least squares approximation.

Furthermore, we test the applicability and the effectiveness of our inversion method with noisy data and obtain satisfactory numerical results as illustrated in the last section of the paper.

Keywords: Inverse scattering, impedance boundary condition, boundary integral equations.

Giriş

Amaçları cisimlerin geometrik (şekil, lokasyon vb.) veya fiziksel (dielektrik permitivite, iletkenlik ve empedans fonksiyonları vb.) özelliklerini belirlemek olan ters saçılma problemlerinin; tıbbi görüntüleme, temassız muayene, mayın tespiti ve jeofizik araştırmalar gibi önemli uygulama alanları bulunmaktadır (Yaman, 2009; Yaman ve Yapar, 2006; Yaman, 2008; Akduman ve Kress, 2003). Bu çizgide bu çalışmada keyfi şekilli bir dielektrik silindir içerisine keyfi şekilli bir empedans cisminin gömülü olması halinde, gömülü cisim üzerinde tanımlı inhomogen empedans fonksiyonu saçılan alan verisi kullanılarak potansiyel yaklaşımı tabanlı bir integral denklem metodu ile belirlenmiştir.

Elektromagnetik teoride empedans sınır koşulu mükemmel olmayan iletken cisimleri veya üzerinde geçirgen ya da absorbe edici bir katman bulunan iletken cisimleri modellemekte kullanılır (Kress vd., 2009). Bu bağlamda, kompleks yapıya sahip bir fiziksel cisim yerine onun daha basit bir matematiksel modeli kullanılarak analiz yapılır. Genel anlamda empedans, uzay koordinatlarının fonksiyonu olarak inhomogen bir formda karşımıza çıkar. Böylesi bir yapıya ait düz saçılma problemlerinde amaç, empedans silindirinin bir veya birden çok, tek veya farklı frekanslarda elektromagnetik dalgalarla aydınlatılması halinde cismin ötesindeki bir ölçüm çizgisinde veya uzak alanda saçılan alanın elde edilmesidir. Ters saçılma probleminde ise bilinen saçılan alan verisinden yararlanılarak cismin üzerindeki empedans fonksiyonunun (Akduman ve Kress, 2003), empedans cisminin şeklinin (Yaman ve Şimşek, 2009) veya hem empedans fonksiyonunun hem de cismin şeklinin belirlenmesi (Serranho, 2006) hedeflenir.

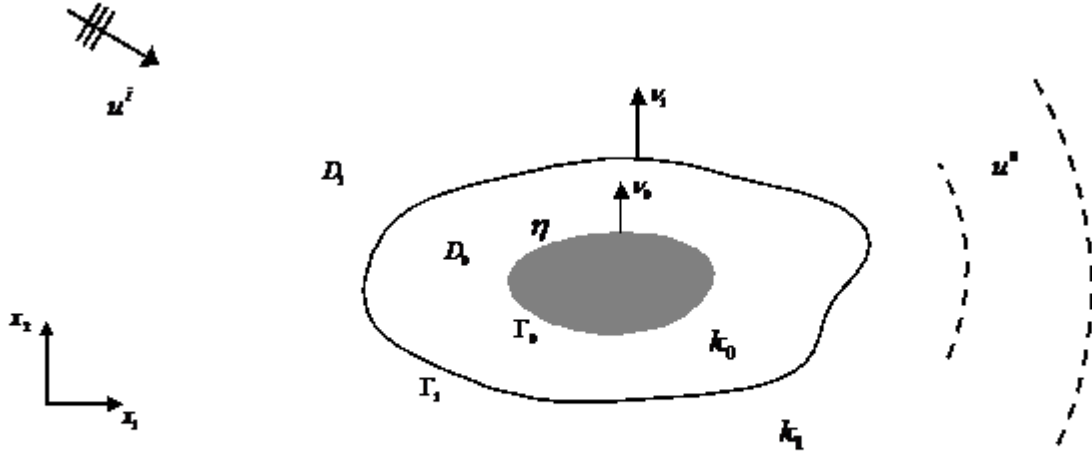
Boş uzayda keyfi şekilli bir silindire ait empedans fonksiyonunun bulunması problemini potansiyel yaklaşımı kullanarak ilk defa Akduman ve Kress (2003) incelemiştir. Bu fikir Yaman (2008) tarafından iletkenlik fonksiyonunun bulunmasına ve Kress ve diğerleri (2009) tarafından gömülü empedans cisimlerine ait empedans fonksiyonunun bulunmasına genişletilmiştir.

Potansiyel yaklaşımı saçılan ve toplam alanların tek- ve çift-katman potansiyelleri cinsinden ifade edilmesine dayanır. Öyle ki tek- ve çift-katman potansiyelleri homojen Helmholtz denkleminin birer çözümüdür ve Sommerfeld veya Silver-Müller radyasyon koşullarını sağlar (Colton ve Kress, 1998).

Şekil 1’de gösterildiği üzere bu çalışmada sonsuz uzun keyfi şekilli dielektrik ve empedans silindirlerinin cisimlerden yeterince uzakta ve sabit frekansta çalışan bir elektromagnetik kaynak tarafından üretilen tek bir düzlem dalga ile aydınlatıldıkları varsayılmıştır. Cisimlerden saçılan alan bilgisinden yararlanarak empedans fonksiyonunun bulunması için öncelikle her bir bölgedeki alanların belirlenmesi gerekir. Bu amaçla dış silindir üzerinde iki, iç silindir üzerinde bir adet yoğunluk fonksiyonu tanımlanmış ve saçılan/toplam alanlar bu yoğunluk fonksiyonlarını içeren tek-katman potansiyelleri ile ifade edilmiştir. Saçılan alana ait tek-katman potansiyelinin asimptotik hali düz problem sonucu olan uzak alan verisine karşı düşer. Böylece dış silindir üzerinde tanımlanan yoğunluk fonksiyonlarından bir tanesi uzak alan denklemini olarak bilinen kötü-kurulmuş birinci bir türden integral denklemin Tikhonov regülarizasyonu anlamında değerlendirilmesinden bulunabilir. Geriye kalan iki bilinmeyen yoğunluk fonksiyonu dielektrik silindir üzerinde sağlanan iletim koşullarından faydalanılarak bulunur. İletim koşulları, sınır eğrisi üzerinde toplam alanların kendisinin ve normal türevlerinin sürekliliğini garanti eder. Dielektrik (iletim) koşullarından elde edilen denklemlerde bulunan operatörlerin kompakt olması bu denklemlerin ikinci bir regülarizasyon ile çözümleri gerekliliğini ortaya koyar. Tüm yoğunluk fonksiyonlarının elde edilmesinin ardından empedans fonksiyonu empedans sınır koşulunun en küçük kareler metodu ile hesaplanmasıyla elde edilebilir (Kress vd., 2009). Bu noktada not edilmelidir ki çalışma boyunca zamana bağlılık $e^{-i\omega t}$ olarak kabul edilerek denklem ve ifadelerde belirtilmemiştir.

Problemin tanımı

$D_0 \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi iç sınırı Γ_0 , dış sınırı Γ_1 ile tanımlanmış yumuşak değişen bir ∂D_0 sınırına



Şekil 1. Problem Geometrisi

sahip, $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ve $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ koşulları altında iki bağımlı ve sınırlı bir bölge olsun. D_0 bölgesinin içerisine doğru yönelmiş, Γ_0 sınır eğrisine ait birim normal vektörü ν_0 ile D_0 bölgesinin dışarısına doğru yönelmiş, Γ_1 sınırına ait birim normal vektörü ν_1 ile gösterelim. η , Γ_0 eğrisi üzerinde tanımlanan inhomojen empedans fonksiyonudur. Silindirlerin x_3 -ekseni doğrultusunda sonsuz uzun oldukları varsayımı altında TM polarize bir elektromagnetik dalganın bu silindire aydınlatması halinde,

$$E(x) = (0, 0, u^i(x)), \quad u^i(x) = e^{ik_1 x-d} \quad (1)$$

gelen alan x_3 -eksenine paralel kalacaktır. Burada $x = (x_1, x_2)$ konum vektörü olmak üzere, $d = (\cos \phi_0, \sin \phi_0)$ dalganın propagasyon doğrultusunu ve ϕ_0 geliş açısını göstermektedir. x_3 -ekseni boyunca problemin homojenliği ve simetrisi göz önüne alındığında iç bölgedeki toplam alan u_0 ve dış bölgedeki toplam alan u_1 , x_3 -eksenine paralel doğrultuda polarize olur. Böylece problem, toplam alanlarının aşağıda verilen

$$\Delta u_j + k_j^2 u_j = 0, \quad D_j \text{ içerisinde, } j = 0, 1. \quad (2)$$

homojen Helmholtz dalga denklemini sağlayacağı skaler bir probleme indirgenir. Burada k_j , j ortamına ait dalga sayısını göstermekte olup, ortama ait dielektrik permitivite ϵ_j , magnetik permeabilite μ_j , iletkenlik σ_j ve açılal frekans ω cinsinden şöyle tanımlanır,

$$k_j = \omega \sqrt{\mu_j (\epsilon_j + i \sigma_j / \omega)}, \quad j = 0, 1. \quad (3)$$

Bu çalışmada karekök fonksiyonun işareti $\text{Re}\{k_j\} > 0$ ve $\text{Im}\{k_j\} \geq 0$ olarak seçilmiştir. Buna ek olarak $\sigma_1 = 0$ kabul edilip k_1 reel ve pozitif olarak düşünülmüştür. D_1 bölgesindeki toplam alan u_1 , gelen alan u^i ve saçılan alanın u^s , süperpozisyonundan ibarettir. Saçılan alanın sonsuzda Sommerfeld yayılma koşulunu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - ik_1 u^s \right) = 0, \quad r = |x| \quad (4)$$

sağlaması u^s 'in giden bir dalga olduğunu belirtmektedir. $\hat{x} = x/|x|$ doğrultusunda düzgün olarak ilerleyen elektromagnetik dalganın asimptotik ifadesi $|x| \rightarrow \infty$ için aşağıdaki gibi verilmekte olup

$$u^s(x) = \frac{e^{ik_1|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad (5)$$

ilgili saçılan alana ait uzak alan paterni u_∞ , olarak ifade edilir. Burada u_∞ birim çember Ω , üzerinde tanımlı bir fonksiyondur. Ayrıca problemi tanımlarken, toplam alanların dış silindir üzerinde dielektrik sınır koşulunu

$$u_1 = u_0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} = \frac{\partial u_0}{\partial \nu_1} \quad \Gamma_1 \text{ üzerinde}, \quad (6)$$

ve gömülü cisim üzerinde $\eta \neq 0$ olmak üzere empedans sınır koşulunu

$$u_0 + \frac{\eta}{ik_0} \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} = 0 \quad \Gamma_0 \text{ üzerinde}, \quad (7)$$

sağladıkları varsayılmıştır. Bu çalışmadaki düz problemin tek bir çözümünün olduğunu garanti edebilmek için

$$\text{Re} \left\{ \frac{\eta}{ik_0} \right\} \geq 0, \quad (8)$$

koşulunun sağlanması gerektiği Kress vd. 2009, makalesinde gösterilmiştir.

Ters problem ve çözümü

Bu çalışmada saçılan alan bilgisinden yararlanarak elde edilmesi hedeflenen gömülü cisim üzerinde tanımlı empedans fonksiyonu η , D_0 bölgesindeki u_0 alanının bilinmesi halinde empedans sınır koşulundan aşağıdaki gibi

$$\eta = -\frac{ik_0 u_0}{(\partial u_0 / \partial \nu_0)}, \quad \Gamma_0 \text{ üzerinde}, \quad (9)$$

hesaplanabilir. Ancak saçılan alan bilgisinden η 'nin bulunması nonlineer ve kötü kurulmuş bir problem olup, çözümün tekliği Rellich lemması ve Holmgren teoremlerine dayanılarak Kress ve diğerleri (2009) 'da gösterilmiştir.

Toplam ve saçılan alanlar, saçıcıların sınırları üzerinde tanımlanmış yoğunluk fonksiyonları kullanılarak tek- veya çift-katman potansiyelleri ile gösterilebilirler, (Colton ve Kress, 1998). Böylece ele alınan problemin çözümü sınır katman integral denklem sistemlerinin çözümüne indirgenir. Bu bağlamda bu çalışmada tek-katman potansiyel yaklaşımı kullanılarak D_0 bölgesindeki toplam alan ve D_1 bölgesindeki saçılan alan aşağıdaki gibi

$$u^s(x) = \int_{\Gamma_1} \Phi_1(x, y) \varphi(y) ds(y) \quad x \in D_1 \quad (10)$$

$$u_o(x) = \int_{\Gamma_1} \Phi_0(x, y) \psi(y) ds(y) + \int_{\Gamma_0} \Phi_0(x, y) \chi(y) ds(y), \quad x \in D_0 \quad (11)$$

ifade edilmiştir. Bu integral ifadelerde görülen,

$$\Phi_m(x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_m |x - y|), \quad x \neq y \quad (12)$$

iki boyuttaki Helmholtz denkleminin D_m ($m=0,1$) bölgesindeki temel çözümünün sıfırcıncı mertebeden birinci tür Hankel fonksiyonu cinsinden ifadesidir.

Ayrıca (10) gösterilimde k_1^2 'nin Γ_1 'in içinde negatif laplasyenin bir Dirichlet özdeğeri olmaması, (11)'de k_0^2 'nin hem Γ_1 hem de Γ_0 içinde negatif laplasyenin bir Dirichlet özdeğeri olmaması koşullarının sağlandığı varsayılmıştır.

Dolayısıyla bilinen saçılan (uzak) ifadesinden yararlanarak φ, ψ, χ yoğunluk fonksiyonlarının bulunması D_0 ve D_1 bölgelerindeki alanları hesap etmemiz için yeterli olacaktır. Fakat (10) ve (11) gösterilimlerinde integrand içerisinde görülen yoğunluk fonksiyonlarının bulunması birinci türden integral denklemlerin çözümlerini gerektirir. Bu tip denklemlere ait kararlı çözümlerin bulunması için Tikhonov regülarizasyonu uygulanmıştır.

Şekil 1 ile gösterilen cisimlerin bir düzlem dalga ile aydınlatılması ile oluşan saçılan alan, tek katman potansiyeli ile (10) denklemindeki gibi ifade edilirse bu integral gösterilime ait uzak alan

$$u_{\infty}(\hat{x}) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_1}} \int_{\Gamma_1} e^{-ik_1 \hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega \quad (13)$$

şeklinde olur. Düz problemin nümerik metotlar ile çözümünden veya fiziksel ölçümler neticesinde elde edilen uzak alan verisinin bilinmesi durumunda dış silindirik Γ_1 eğrisi üzerinde tanımlanan $\varphi \in L^2(\Gamma_1)$ fonksiyonunun bulunması için aşağıda operatör formda verilen

$$u_{\infty} = S_{\infty} \varphi, \quad (14)$$

kötü kurulmuş bir integral denklemin çözülmesi gerekir. Burada $S_{\infty} : L^2(\Gamma_1) \rightarrow L^2(\Omega)$ ile tanımlı olup $\hat{x} \in \Omega$ için,

$$(S_{\infty} \varphi)(\hat{x}) := \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_1}} \int_{\Gamma_1} e^{-ik_1 \hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y), \quad (15)$$

şeklinde bir gösterilime sahiptir. Bu noktada (14) denkleminin yaklaşık ve kararlı bir çözümünü bulabilmek için aşağıdaki

$$\alpha_1 \varphi + S_{\infty}^* S_{\infty} \varphi = S_{\infty}^* u_{\infty}, \quad (16)$$

denklem çözülmüştür. Burada $\alpha_1 > 0$ pozitif sabit bir sayı olup, $S_{\infty}^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$ S_{∞} operatörünün adjointidir.

Bu noktada integral ifadeleri daha kısa gösterebilmek adına, seçilen bir f sürekli fonksiyonu için tek-katman potansiyeline ait $S_{j\ell,m} : C(\Gamma_j) \rightarrow C(\Gamma_{\ell})$ operatörü,

$$(S_{j\ell,m} f)(x) := 2 \int_{\Gamma_j} \Phi_m(x, y) f(y) ds(y), \quad (17)$$

$$x \in \Gamma_{\ell}, \quad j, \ell, m = 0, 1.$$

ve $S_{j\ell,m}$ operatörünün normal türevi,

$$K'_{j\ell,m} : C(\Gamma_j) \rightarrow C(\Gamma_{\ell})$$

$$(K'_{j\ell,m} f)(x) := 2 \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \Phi_m(x, y)}{\partial \nu_{\ell}(x)} f(y) ds(y), \quad (18)$$

$$x \in \Gamma_{\ell}, \quad j, \ell, m = 0, 1.$$

olarak tanımlanmaktadır (Kress vd., 2009). j alt-indisi integrasyon eğrisini ℓ alt-indisi integralin değerlendirildiği eğriyi ifade eder. $S_{j\ell,m}$ ve $K'_{j\ell,m}$ operatörleri $j = \ell$ için zayıf tekil çekirdek, $j \neq \ell$ için ise sürekli bir çekirdek içerdiğinden kompakt operatördürler (Colton ve Kress, 1998).

Bu doğrultuda, (10) ve (11) integral gösterimler potansiyellere ilişkin sıçrama koşulları (Colton ve Kress, 1983) altında dielektrik sınır koşullarında yerine konursa operatör formda aşağıdaki denklem sistemi

$$S_{11,0} \psi + S_{01,0} \chi = 2u^i|_{\Gamma_1} + S_{11,1} \varphi \quad (19)$$

$$K'_{11,0} \psi + \psi + K'_{01,0} \chi = 2 \frac{\partial u^i}{\partial \nu_1} \Big|_{\Gamma_1} + K'_{11,1} \varphi - \varphi \quad (20)$$

elde edilir. Bu sistemdeki bilinmeyen fonksiyonlardan $\psi \in L^2(\Gamma_1)$ fonksiyonu (20) denklemini kullanılarak $\chi \in L^2(\Gamma_1)$ cinsinden aşağıdaki gibi

$$\psi = (I + K'_{11,0})^{-1} \times \left\{ \left(2 \frac{\partial u^i}{\partial \nu_1} + K'_{11,1} \varphi - \varphi \right) - K'_{01,0} \chi \right\} \quad (21)$$

ifade edilebilir. Bu son ifadenin (19) denkleminde yerleştirilmesi ile sadece χ yoğunluk fonksiyonuna bağlı

$$B \chi = g, \quad (22)$$

kötü kurulmuş birinci türden integral denklemini elde ederiz. Öyle ki, burada $B: L^2(\Gamma_0) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$ ile tanımlanmış olup,

$$B := S_{01,0} - S_{11,0} (I + K'_{11,0})^{-1} K'_{01,0} \quad (23)$$

$$g := 2u^i + S_{11,1}\varphi - S_{11,0} (I + K'_{11,0})^{-1} \left(2 \frac{\partial u^i}{\partial \nu_1} + K'_{11,1}\varphi - \varphi \right) \quad (24)$$

(22) denklemini Tikhonov anlamında değerlendirildiği taktirde aşağıdaki denklem

$$\alpha_2 \chi + B^* B \chi = B^* g, \quad (25)$$

uygun seçilen $\alpha_2 > 0$ değerleri için çözülür. Buradan elde edilen χ fonksiyonu (21) denkleminde yerine konularak ψ fonksiyonunun hesabı gerçekleştirilmiş olur. Bu halde u_0 ve u^s alanları (10) ve (11) ifadeleri yardımıyla bulunabilir. Devamında, D_0 bölgesindeki toplam alanın ve normal türevinin sıçrama koşulları altında Γ_0 üzerindeki aşağıdaki ifadeleri

$$u_0 = \frac{1}{2} (S_{10,0}\psi + S_{00,0}\chi) \quad (26)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} = \frac{1}{2} (K'_{10,0}\psi + K'_{00,0}\chi - \chi) \quad (27)$$

kullanılarak (9) denkleminde η empedans fonksiyonu elde edilir. η 'nin nümerik hesabında, $\partial u_0 / \partial \nu_0$ teriminin sıfır yada sıfıra çok yakın değerler alması durumunu uygun bir yaklaşım ile değerlendirmek için empedans fonksiyonu trigonometrik baz fonksiyonları $\kappa_r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm R$ ile bunlara ait sabit katsayıların $\tau_r = -\tau_R, \dots, \tau_R$ çarpımlarına ait bir seri toplam şeklinde

$$\eta = \sum_{r=-R}^R \tau_r \kappa_r \quad \Gamma_0 \text{ üzerinde} \quad (28)$$

gösterilmiştir. Böylece (9) denklemini aşağıdaki gibi

$$\sum_{n=1}^N \left| u_0(x_n) + \frac{1}{ik_0} \sum_{r=-R}^R \tau_r \kappa_r(x_n) \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0}(x_n) \right|^2 \quad (29)$$

en küçük kareler anlamında değerlendirilir. Burada τ_{-R}, \dots, τ_R katsayıları (29) ifadesinin minimum değerini almasını sağlayacak bilinmeyen katsayılar olmakla beraber R bir tür regülasyon parametresi olarak değerlendirilebilir.

Nümerik örnekler

Bu bölüm önerilen metodun etkinliği ve uygulanabilirliğinin incelenmesine ayrılmıştır. Bu bağlamda gürültülü ve gürültüsüz, yakın veya uzak alan verileri kullanılarak çeşitli sayısal örnekler sunulmuştur. Tüm bu sayısal uygulamalarda integral denklem sistemleri $N = 64$ noktada ayrıklaştırılarak Nyström metodu kullanılarak çözülmüş olup, regülasyon parametreleri α_1, α_2 ve R deneme yanılma metodu ile seçilmiş ve her bir örneğe ait parametre Tablo 1.'de sunulmuştur. Gürültülü veri elde etmek için aşağıda verilen

$$\tilde{u} = u + \delta \rho \frac{\|u\|}{\|\rho\|} \quad (30)$$

ifade kullanılmıştır. Burada u gürültüsüz yakın veya uzak alan ve ρ kompleks rastgele değişken olup, $\{\text{Re } \rho, \text{Im } \rho\} \in (0,1)$. (30)'da δ parametresi gürültü oranıdır ve $\delta = 0.03$ seçilmiştir. Örneklerde, gürültülü veri ile elde edilen sonuçlar kesikli, gürültüsüz veriden elde edilen sonuçlar düz çizgi ile gerçek empedans ise noktalı ve koyu bir çizgi ile belirtilmiştir.

Örnek 1:

Birinci örnekte empedans silindirinin şekli köşeleri yumuşak değişen bir üçgen,

$$\Gamma_0 = \left\{ \begin{array}{l} (1 + 0.15 \cos 3t)(\cos t, \sin t) : \\ t \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} \quad (25) \quad (31)$$

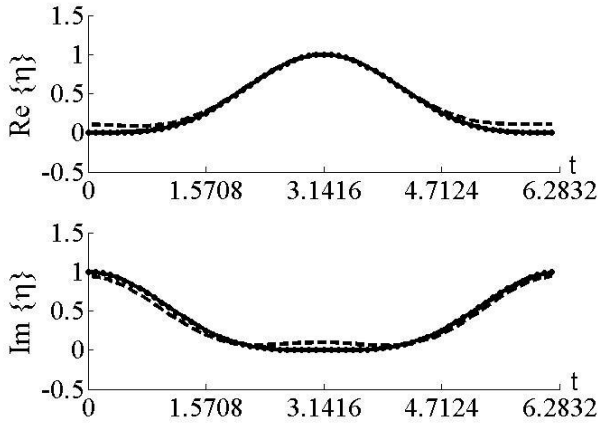
dielektrik silindir ise bir elips olarak

$$\Gamma_1 = \{(2 \cos t, 1.5 \sin t) : t \in [0, 2\pi]\} \quad (32)$$

seçilmiştir. Ortamlara ait dalga sayıları $k_0 = 1$ ve $k_1 = 0.5$ 'tir ve saçıcılar $\phi_0 = 0^\circ$ ile gelen bir elektromagnetik dalga ile aydınlatılmıştır. Γ_0 üzerindeki inhomojen empedans fonksiyonu

$$\eta_1(t) = \sin^4 \frac{t}{2} + i \cos^4 \frac{t}{2}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (33)$$

ile tanımlanmıştır.



Şekil 2. η_1 fonksiyonun gürültülü ve gürültüsüz uzak alan verisi kullanılarak elde edilmesi

Örnek 2:

İkinci simülasyonda ilk örnekteki problem konfigürasyonu aynen kullanılmış olup sadece empedans fonksiyonu aşağıdaki gibi

$$\eta_2(t) = \frac{8 + 2 \sin t}{5 + \cos t} + i \frac{4 \cos t}{7 - \sin t}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (34)$$

seçilerek rasyonel fonksiyon yapısındaki bir empedansın uzak alan verisi kullanılarak bulunması hedeflenmiştir.

Örnek 3:

Bu örnekte saçıcıların daha kompleks bir geometriye sahip olma durumunu incelemek için empedans silindiri fıstık şekline benzeyen bir eğri

$$\Gamma_0 = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\cos^2 t + 0.25 \sin^2 t} (\cos t, \sin t) \\ t \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} \quad (35)$$

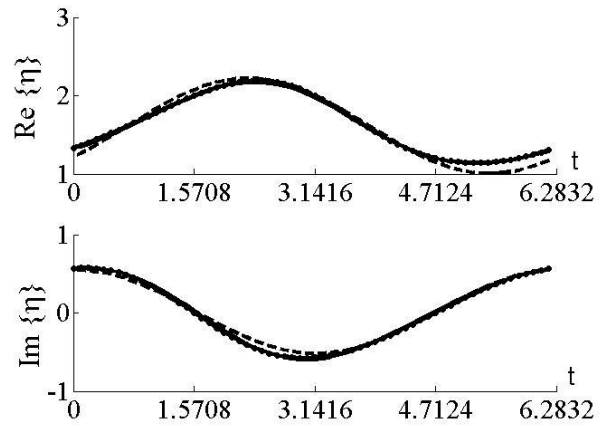
dielektrik silindir ise köşeleri yuvarlatılmış bir üçgen olarak

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{array}{l} (2 + 0.3 \cos 3t) (\cos t, \sin t) \\ t \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} \quad (36)$$

alınıp, empedans fonksiyonu $t \in [0, 2\pi]$ için

$$\eta_3(t) = 1.5 - \cos t + 0.5 \sin 2t + i \frac{\cos t}{3 - 2 \cos t} \quad (37)$$

olarak seçilmiştir. Saçıcılar $\phi_0 = 0^\circ$ açısıyla gelen bir düzlem dalga ile aydınlatılmış olup saçılan (yakın) alan $c_0 = 2.5$ yarıçapındaki bir ölçüm çemberi üzerindeki $N = 64$ noktada ölçülmüştür. Dalga sayıları $k_0 = 3$ ve $k_1 = 2$ 'dir.



Şekil 3. η_2 fonksiyonun gürültülü ve gürültüsüz uzak alan verisi kullanılarak elde edilmesi

Örnek 4:

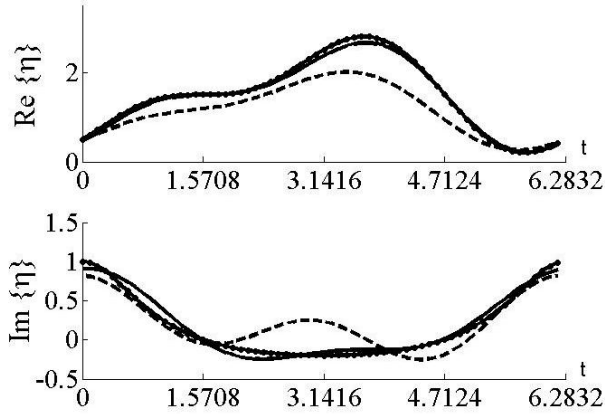
Son örnekte Γ_0 (35) ile verilen eğri ve

$$\Gamma_1 = \{(1.4 \cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\} \quad (38)$$

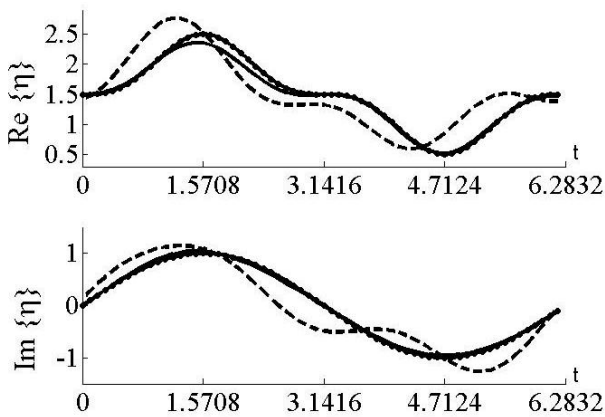
bir elips olarak düşünülmüştür. $\phi_0 = 180^\circ$ ve empedans fonksiyonu aşağıda tanımlanmıştır,

$$\eta_4(t) = 1.5 + \sin^3 t + i \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (39)$$

D_0 bölgesine ait dalga sayısı $k_0 = 2 + i$ ve D_1 bölgesine ait dalga sayısı $k_1 = 0.5$.



Şekil 4. η_3 fonksiyonunun gürültülü ve gürültüsüz yakın alan verisi kullanılarak elde edilmesi



Şekil 5. η_4 fonksiyonunun gürültülü ve gürültüsüz uzak alan verisi kullanılarak elde edilmesi

Sonuçlar

Nümerik sonuçlardan da görülmektedir ki önerilen yöntemle, bir rezonans bölgesinde (ortamlara ait dalga sayıları ile cisim boyutları karşılaştırılabilir oranlarda), iki boyutta, dielektrik silindirler içerisine gömülü empedans silindirlerine ait inhomojen empedans fonksiyonları %3 gürültülü saçılan alan verisinden elde edilebilmektedir. Tablo 1'den görüleceği gibi gürültüsüz veri kullanılması halinde daha küçük, gürültülü veri kullanılması halinde ise daha büyük Tikhonov regülarizasyon parametresi seçilmelidir.

Tablo 1. Regülarizasyon parametreleri

Örnek No:	Gürültüsüz Data			Gürültülü Data		
	α_1	α_2	R	α_1	α_2	R
1	10^{-14}	10^{-4}	2	10^{-3}	10^{-2}	2
2	10^{-12}	10^{-4}	2	10^{-3}	10^{-2}	1
3	10^{-9}	10^{-5}	2	10^{-6}	10^{-2}	2
4	10^{-11}	10^{-7}	3	10^{-3}	10^{-3}	3

Özellikle gürültülü veri kullanılması durumunda dielektrik silindirin şeklindeki küçük değişimler empedans fonksiyonunun bulunması önemli ölçüde olumsuz etkilemektedir. Ayrıca saçıcıların geometrik özelliklerine bağlı olarak elektromagnetik dalganın geliş açısı sonuçlar üzerinde etkin rol oynamaktadır.

Dalga sayılarının artması saçılan alanda hızlı değişimlere neden olmaktadır. Bu değişimler de empedans fonksiyonunun iyi bir şekilde bulunmasını güçleştirmektedir.

Kaynaklar

- Akduman, İ. ve Kress, R., (2003). Direct and inverse scattering problems for inhomogeneous impedance cylinders of arbitrary shape, *Radio Science*, **38**, 1055-1064.
- Colton, D. ve Kress, R., (1998). *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, 2nd. edition*, Springer, Berlin.
- Colton, D. ve Kress, R., (1983). *Integral equation methods in scattering theory*, Wiley-Interscience Publications, New York.
- Kress, R., Yaman, F., Yapar, A. ve Akduman, İ., (2009). Inverse scattering for an impedance cylinder buried in a dielectric cylinder, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **17**, 4, 473-488.
- Serranho, P., (2006). A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance, *Inverse Problems*, **22**, 663-680.
- Yaman, F., (2008). Numerical solution of an inverse conductive boundary value problem, *Radio Science*, **43**, 1-10.
- Yaman, F., (2009). Location and shape reconstructions of sound-soft obstacles buried in penetrable cylinders, *Inverse Problems*, **25**, 6, 1-17.
- Yaman, F. ve Yapar, A., (2006). One-dimensional profile inversion of a planar layer bounded by an inhomogeneous impedance boundar, *Proceed-*

ings, 11th International Workshop Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory, 65-70, Tbilisi.

Yaman, F. ve Şimşek, S., (2009). Shape reconstruction of an inhomogeneous impedance cylinder

via potential and neural network approach, *Microwave and Optical Technology Letters*, **51**, 1, 119-124.